

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В ЕНЕРГЕТИЦІ ТА ПРОМИСЛОВОСТІ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, що навчаються на третьому рівні вищої
освіти (PhD) за спеціальністю 144 «Теплоенергетика»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Назва: Навчальний посібник по курсу «Математичне моделювання теплових процесів в енергетиці та промисловості. Практикум» [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. третього рівня вищої освіти (PhD) спеціальності 144 «Теплоенергетика» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Д.В. Риндюк, В.А. Пешко – Електронні текстові дані (1 файл: 4,34 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 75 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 13.05.2021 р.)
за поданням Вченої ради ТЕФ (протокол № 10 від 29.03.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В ЕНЕРГЕТИЦІ ТА ПРОМИСЛОВОСТІ ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Риндюк Дмитро Вікторович*, канд. техн. наук, доц.
Пешко Віталій Анатолійович, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний
редактор *Сірий О.А.*, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: *Баранюк О.В.*, канд. техн. наук, доц.
Соломаха А.С., канд. техн. наук, доц.

Сучасна орієнтація інженерної освіти на формування загальнокультурних і професійних компетенцій встановлює пріоритети у професійній підготовці не лише на отримання нових математичних знань, а й на виховання потреби і готовності до застосування математичних методів у професійній діяльності. У даному посібнику описуються методичні особливості використання професійно орієнтованих задач на різних рівнях складності із застосуванням системи MathCAD в рамках дисципліни «Математичне моделювання теплових процесів в енергетиці та промисловості».

Основу даного практикума складають інженерно-фізичні проекти, висвітлені в роботах А.П. Солодова та В.Ф. Очкова.

Посібник орієнтовано на студентів старших курсів та аспірантів (PhD) технічних університетів, що навчаються за спеціальністю 144 «Теплоенергетика».

Зміст

Вступ.....	5
1. ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ З ТЕПЛОВИДІЛЕННЯМ	7
1.1. Загальні питання	7
1.2. Постановка задачі та математична модель.....	7
1.3. Фазовий стан системи. Стійкі та нестійкі стани рівноваги	10
1.4. Представлення множини рівноважних станів.....	12
1.5. Побудова біфуркаційної діаграми.....	14
1.6. Тривимірне представлення рівноважних станів у формі «катастрофи збірки».....	15
1.7. Стрибки станів при плавних змінах параметрів	17
1.8. Часова еволюція системи з тепловиділенням	19
1.9. Висновок	23
2. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ОКОЛІ КРИТИЧНОЇ ТОЧКИ ПОПЕРЕЧНО ОБТІЧНОЇ ТРУБИ.....	24
2.1 Постановка задачі	24
2.2. Інтегральне рівняння теплового пограничного шару	25
2.3. Математичний опис задачі.....	28
2.4 Розподілення швидкості зовнішнього потоку по окружності труби.....	30
2.5. Виведення співвідношень для критичної точки	32
2.6 Приведення математичного опису до безрозмірного виду	35
2.7. Представлення правої частини диференційного рівняння у формі алгоритму оптимізації	36
2.8. Чисельне інтегрування за допомогою вбудованої функції Odesolve	37
2.9. Висновок	39
3. ТЕРТЯ І ТЕПЛООБМІН В ПОГРАНИЧНОМУ ШАРІ.....	41
3.1. Рівняння Фолкнера-Скен.....	41
3.2 Математичне формулювання.....	45
3.3. Зведення крайової задачі до початкової задачі методом sbval.....	48
3.4. Розв'язок початкової задачі методом rkfixed	50
3.5. Побудова поля потоку	52

3.6. Пограничний шар на проникній поверхні	54
3.7. Рівняння теплового пограничного шару	60
3.8. Закон теплообміну	65
3.9. Висновок	67
Завдання для індивідуальної роботи	69
Список літератури	75

Вступ

У підготовці фахівця-теплоенергетика важливе місце відводиться розгляду матеріалів присвячених рівнянням математичної фізики, що мають вивчатися в рамках дисципліни «Вища математика» й активно використовується в математичному моделюванні різних фізичних процесів, а також є теоретичною базою для багатьох загальних і спеціальних дисциплін, таких, наприклад, як «Теплотехніка», «Термодинаміка», «Гідрогазодинаміка» і ін.

Разом з тим, в вивченні матеріалів присвячених рівнянням математичної фізики студентів-теплоенергетиків виділяється ряд методичних проблем, частину яких ми намагались подолати у даному посібнику.

Як показує практика, рівняння математичної фізики зазвичай розглядаються в 3-му або 4-му семестрах вивчення курсу математики за стандартною для технічних спеціальностей програмою. Оскільки стандартна рекомендована програма передбачає вивчення всіх основних типів лінійних рівнянь з частинними похідними і деяких інтегральних рівнянь, а на освоєння розділу відводиться відносно невелика кількість аудиторних годин, то, як правило, встигають розглянути тільки прості типові завдання (практично оглядово), не враховуючи специфіку професійної діяльності теплоенергетиків.

Однак для даної спеціальності найбільш актуальні наступні задачі стаціонарної та нестаціонарної теплопровідності, математична модель яких є змішаною або крайовою задачею для диференціального рівняння в частинних похідних:

- задача про поширення теплоти в плоскому ребрі;
- температурне поле в пластині з нерівномірним підведенням (відведенням) теплоти по границі;
- температурне поле в процесі охолодження (нагрівання) пластини;
- температурне поле в процесі охолодження (нагрівання) нескінченно довгого циліндра, кулі та деяких тіл кінцевих розмірів;
- охолодження і нагрівання тіл, що мають форму паралелепіпеда або циліндра кінцевої довжини;
- охолодження пластини за рахунок конвекції і випромінювання;
- теплообмін при ламінарній течії в круглій трубі;
- теплообмін в круглій трубі при постійній щільності теплового потоку на стінці.

Зазвичай ці задачі вивчаються не в курсі математики, а в рамках курсу «Тепломасообмін». Причому розглядаються методи розв'язків найчастіше досить формально, ґрунтуючись на тому, що студенти вже мають фундаментальні уявлення щодо вирішення подібних завдань.

З огляду на те, що методи вирішення зазначених задач пов'язані з досить складними математичними викладками, необхідно вивчення математичних моделей даних процесів обов'язково в рамках саме дисципліни безпосередньо пов'язаній з математичним моделюванням саме теплових процесів, що сприяє формуванню у студентів відповідних навиків застосування математичного апарату для вирішення професійних задач теплоенергетики.

В силу того, що студенти технічних спеціальностей не мають достатньої математичної підготовки для розв'язання вищевказаних задач аналітичними методами, й зважаючи на те, що в професійній діяльності найчастіше досить знайти тільки наближене рішення, то доцільно використовувати при вивченні рівнянь математичної фізики чисельні методи із застосуванням сучасного програмного забезпечення.

Найбільш зручним для навчальних цілей є математичний пакет MathCAD, так як він не має спеціальної мови, знання якої є обов'язковими при роботі з іншими пакетами, при цьому має практично такі ж можливості, що й інші, більш спеціалізовані програмні продукти. MathCAD створений розробниками як інструмент роботи інженерів і не призначений для програмування занадто складних задач - для цього застосовуються система Matlab, мови програмування Python, C, C++, JS, R, Swift. Головною перевагою MathCAD перед іншими розрахунковими засобами є легкість і наочність програмування задачі, що дозволяє досить легко справлятися із задачами інженерної практики.

З огляду на, те що для студентів спеціальності напряму 144 «Теплоенергетика» не передбачено докладного освоєння чисельних методів, використання математичних пакетів (зокрема системи MathCAD) при вивченні рівнянь математичної фізики в рамках дисципліни «Математичне моделювання теплових процесів в енергетиці та промисловості» стає надзвичайно актуальним.

1. ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ З ТЕПЛОВИДІЛЕННЯМ

1.1. Загальні питання

Внутрішнє тепловиділення в різноманітних об'єктах може виникати:

- в результаті перетворення ядерної енергії в теплову енергію;
- при екзотермічній хімічній реакції (окислення, горіння, вибух);
- при проходженні електричного струму (електрозварювання, мікросхеми комп'ютера).

Функціонування систем такого роду може бути пов'язано з небезпекою неконтрольованого швидкого розігріву, перевищенням допустимої температури, розплавленням, самозайманням або вибухом. Можливість розвитку систем з тепловиділенням по таким катастрофічним сценаріям міститься в найпростішій динамічній моделі об'єкта, згідно з якою:

- потужність тепловиділення визначається швидкістю хімічної реакції, згідно закону Арреніуса;
- теплообмін з навколишнім середовищем відбувається за законом Ньютона-Ріхмана.

Дана модель створена згідно теорії теплового вибуху М. М. Семенова [1].

Поняття катастрофи як деякого руйнівного явища доповнюється математичною метафорою, а саме, описом динамічної системи в формі так званої катастрофи збірки з теорії катастроф Р. Тома [2].

1.2. Постановка задачі та математична модель

Тепловий баланс для тіла об'ємом V з внутрішніми джерелами теплоти, через поверхню F якої відводиться теплота в навколишнє середовище (рис. 1.1), записується в формі нелінійного диференціального рівняння відносно змінної стану – температури об'єкту T [1]:

$$\underbrace{\rho c V \frac{d}{d\tau} T}_{\text{Збільшення внутрішньої енергії}} = \underbrace{q_{vm} V \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)}_{\text{Внутрішнє тепловиділення}} - \underbrace{\alpha F (T - T_f)}_{\text{Тепловідвід через поверхню}} \quad (1.1)$$

Де τ – час, незалежна змінна; T_f – температура навколишнього середовища; α – коефіцієнт тепловіддачі; ρ – щільність; c – питома теплоємність; E – енергія активації, параметр в формулі Арреніуса: «швидкість реакції» $\sim \exp(-E/RT)$; R – газова стала; q_{vm} – нормувальне значення для теплового ефекту реакції, записане у формі об'ємної щільності тепловиділення (Вт/м^3).

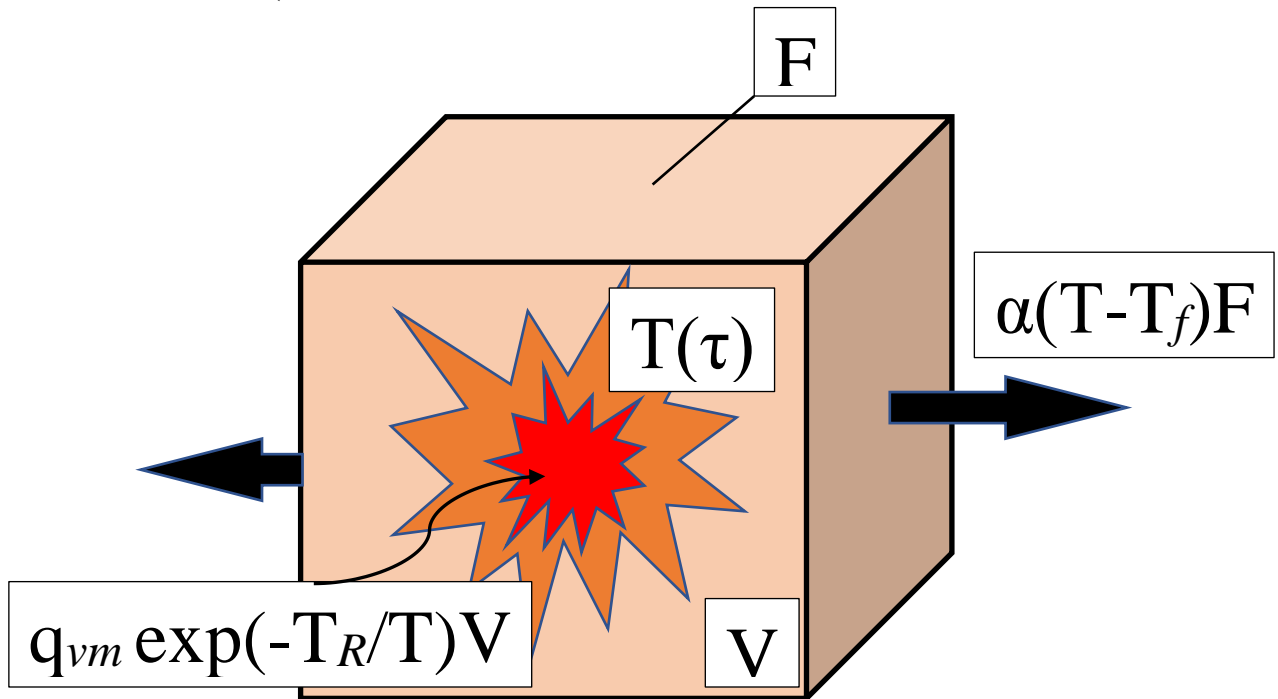


Рис. 1.1 Об'єкт з внутрішнім тепловиділенням

При формулюванні цього рівняння припускалося, що всередині тіла має місце рівномірний розподіл температури завдяки перемішуванню або високій теплопровідності речовини.

Використовуючи в якості масштабів для температури і часу відповідно величини $T_R = E/R$ і $\tau_0 = \rho c T_R / q_{vm}$, перепишемо диференціальне рівняння (1.1) в безрозмірному вигляді:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} W}_{\text{Збільшення внутрішньої енергії}} = \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{W}\right)}_{\text{Внутрішнє тепловиділення}} \underbrace{- A(W - W_f)}_{\text{Тепловідвід через поверхню}} \quad (1.2)$$

Безрозмірні змінні і параметри задаються наступними співвідношеннями:

- $W = T/T_R$ – безрозмірна температура об’єкту, зміна стану;
- $t = \tau/\tau_0$ – безрозмірний час, незалежна змінна;
- $A = \alpha F T_R / V q_{vm}$ – безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі, параметр;
- $W_f = T_f/T_R$ – безрозмірна температура навколишнього середовища, параметр.

Потужність тепловиділення при хімічній реакції в залежності від температури виражається нелінійною залежністю (рис.1.2)

$$Q_V = \exp(-\frac{1}{W}).$$

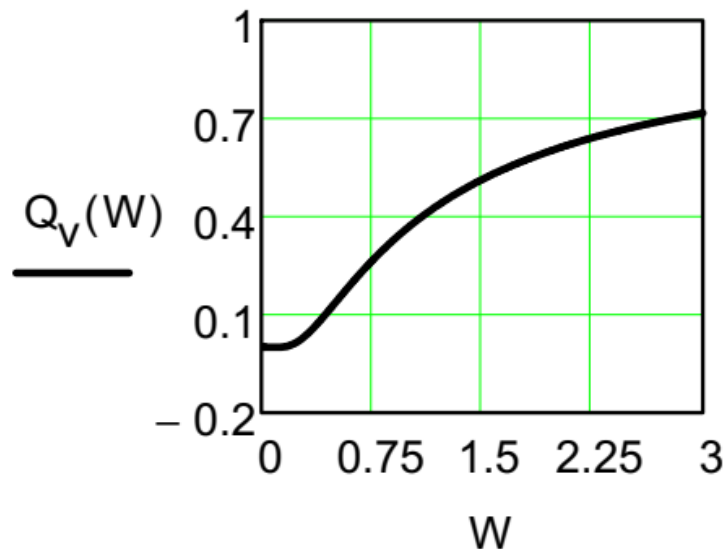


Рис. 1.2 Нелінійна S-подібна залежність тепловиділення від температури

При низьких температурах тепловиділення невелике, через малу швидкість хімічної реакції, далі спостерігається різке збільшення і далі послідовний вихід на асимптотичне одиничне значення.

Теплообмін з навколишнім середовищем описується законом Ньютона-Ріхмана

$$Q_F = A(W - W_f),$$

згідно якому, тепловий потік на поверхні пропорційний різниці температур об’єкта W і середовища W_f .

Принципове значення для подальшого аналізу має характер залежності правої частини диференційного рівняння (1.2) $Q(W, A, W_f) = Q_V - Q_F \equiv \exp\left(-\frac{1}{W}\right) - A(W - W_f)$ від температури (змінної стану W).

По фізичному змісту права частина є результуючою кількістю підвідної теплоти Q , тобто потужність внутрішнього тепловиділення Q_V за винятком відвідного з поверхні теплового потоку Q_F . Права частина (1.2) як функція температури W представлена на рис. 1.3 для деякої вибраної пари значень керуючих параметрів (A , W_f). В точках перетину кривої з віссю абсцис результуючий теплопідвід виявляється рівним нулю. Отже, похідна dW/dt перетворюється в нуль, і температура об'єкту не буде змінюватися в часі. Такі точки називаються стаціонарними або рівноважними.

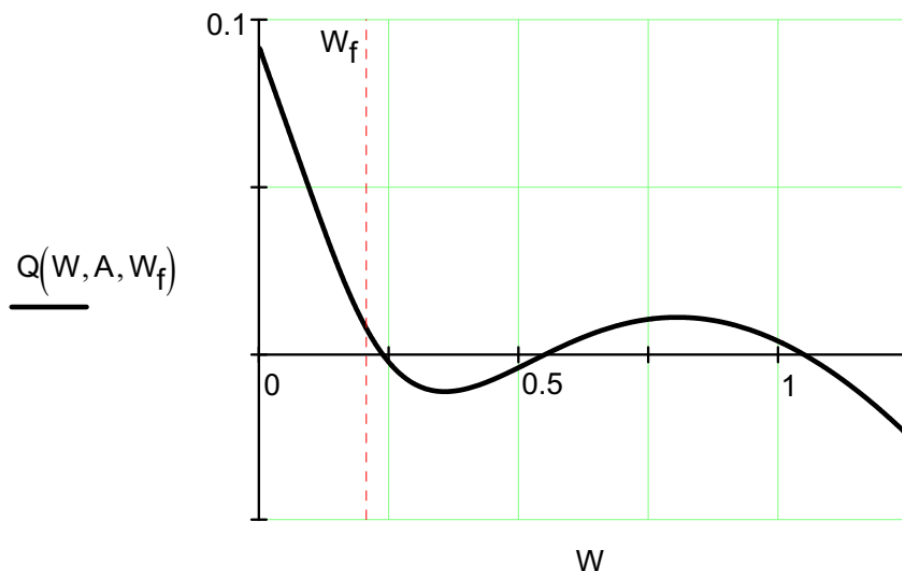


Рис. 1.3 Представлення правої частини при значеннях параметрів:

$$A = 0,46; \quad W_f = 0,2$$

В наслідок яскраво вираженої нелінійності задачі маємо три стаціонарні точки. Далі ми розглянемо питання стійкості або нестійкості таких станів й те, як залежить положення цих особливих точок від керуючих параметрів (A , W_f).

1.3. Фазовий стан системи. Стійкі та нестійкі стани рівноваги

Питання стійкості стаціонарного (рівноважного) стану пропонується розв'язати наступним чином. Ініціюють невелике відхилення від рівноваги. Якщо після цього відбувається повернення до початкового рівноважного положення, то останнє являється стійким. В іншому випадку рівноважний стан нестійкий: навіть невелике початкове відхилення призведе до прогресуючого

віддалення, доки система не прийде в який-небудь інший рівноважний стан (або доки не зруйнується).

На рис. 1.4 три рівноважних стани позначені індексами **1** – **3**. Знак правої частини диференціального рівняння (1.2) на різних відрізках осі W показаний в колах. Нехай відбулося відхилення вправо від точки рівноваги **2**. Видно, що права частина диференціального рівняння (1.2) і, відповідно, похідна $dW/d\tau$ позитивні. Тому значення W буде зростати, стан системи буде зміщуватися все більше вправо від початкової точки **2** (вказано стрілкою). Отож, рівноважний стан **2** є **нестійка стаціонарна точка**. Легко довести, що точки **1** і **3**, навпаки, являються **стійкими стаціонарними станами**.

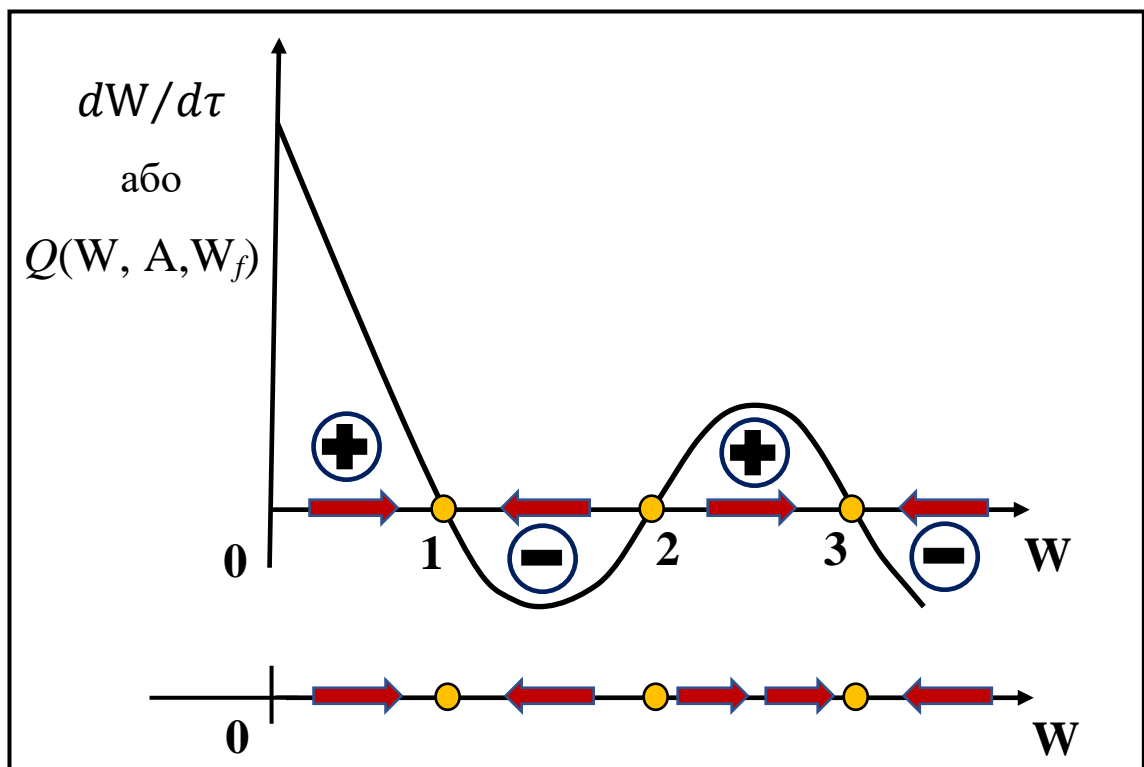


Рис. 1.4 Стійкі і нестійкі стани
(точки 1, 3 – стійкі стаціонарні стани; 2 – нестійкі рівноважні стани)

В нижній частині рис. 1.4 показаний **фазовий портрет** системи. Для задачі першого порядку (з одним диференціальним рівнянням першого порядку) це вісь змінного стану W , розмічена точками рівноваги та стрілками, що показують напрямок еволюції з різноманітних початкових станів. **Головний зміст фазового портрету в даному прикладі – наявність трьох точок рівноваги, двох стійких і однієї нестійкої між ними.** Стійкі точки **1** і **3** служать центрами тяжіння для різноманітних початкових станів, а нестійка точка **2** – границею, що розділяє ці дві області тяжіння.

Опишемо якісно еволюцію системи в залежності від початкового стану. Нагадаємо, що аналіз проводиться для деякого частинного поєднання параметрів (A, W_f) .

Якщо початкова температура об'єкту нижча, ніж в точці **2**, то система буде прямувати до стійкого стану **1** з відносно низькою температурою. Такий стан можна інтерпретувати, наприклад, як самонагрівання об'єму, що містить в собі органічні речовини (торф, вугілля), за рахунок повільної реакції окислення з виділенням теплоти. Якщо ж початкова температура вища, ніж в точці **2**, то система буде прямувати до стану **3** з дуже високою температурою. Такий процес можна інтерпретувати, як розігрів з подальшим займанням, спалахом та вибухом.

Динаміка цих процесів буде докладно досліджена далі. Однак попередньо в наступних параграфах розглянута залежність положення і характеру точок рівноваги від керуючих параметрів. Іншими словами, для будь якої точки на площині параметрів (A, W_f) визначається число стаціонарних точок, обчислюються значення температури в них та вказується, стійкі чи ні відповідні стани.

1.4. Представлення множини рівноважних станів

В рівноважному стані внутрішнє тепловиділення врівноважується тепловідводом в навколишнє середовище, тобто права частина диференційного рівняння (1.2) перетворюється в нуль:

$$0 = \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{W}\right)}_{\text{Внутрішнє тепловиділення}} - \underbrace{A(W - W_f)}_{\text{Тепловідвід через поверхню}} \quad (1.3)$$

Рівняння (1.3) задає множину станів рівноваги W при різних значеннях керуючих параметрів (A, W_f) . Ми не вводимо спеціального позначення для **рівноважних** значень безрозмірної температури W , оскільки далі буде розглянуто тільки такі стани.

Множину рівноважних станів можна представити в різній графічній формі. Почнемо зі звичайного двовимірного графіку, на якому по горизонтальній осі відкладається надлишкова рівноважна температура $dW = W - W_f$, а по вертикальній осі – значення безрозмірного коефіцієнту тепловіддачі A (рис. 1.5). В якості параметру прийнята температура навколишнього середовища W_f . Для розглянутої задачі явна форма такого представлення легко отримується з вихідної умови рівноваги (1.3) і виглядає наступним чином:

$$A(W_f, dW) = \frac{1}{dW} \exp\left(-\frac{1}{W_f + dW}\right). \quad (1.4)$$

Якщо зафіксувати будь-яке значення температури середовища W_f , тобто вибрати будь-яку криву на рис. 1.5, і провести горизонтальну лінію з заданим значенням коефіцієнту тепловіддачі A , то в точках перетину отримуємо рівноважні значення надлишкової температури об'єкту.

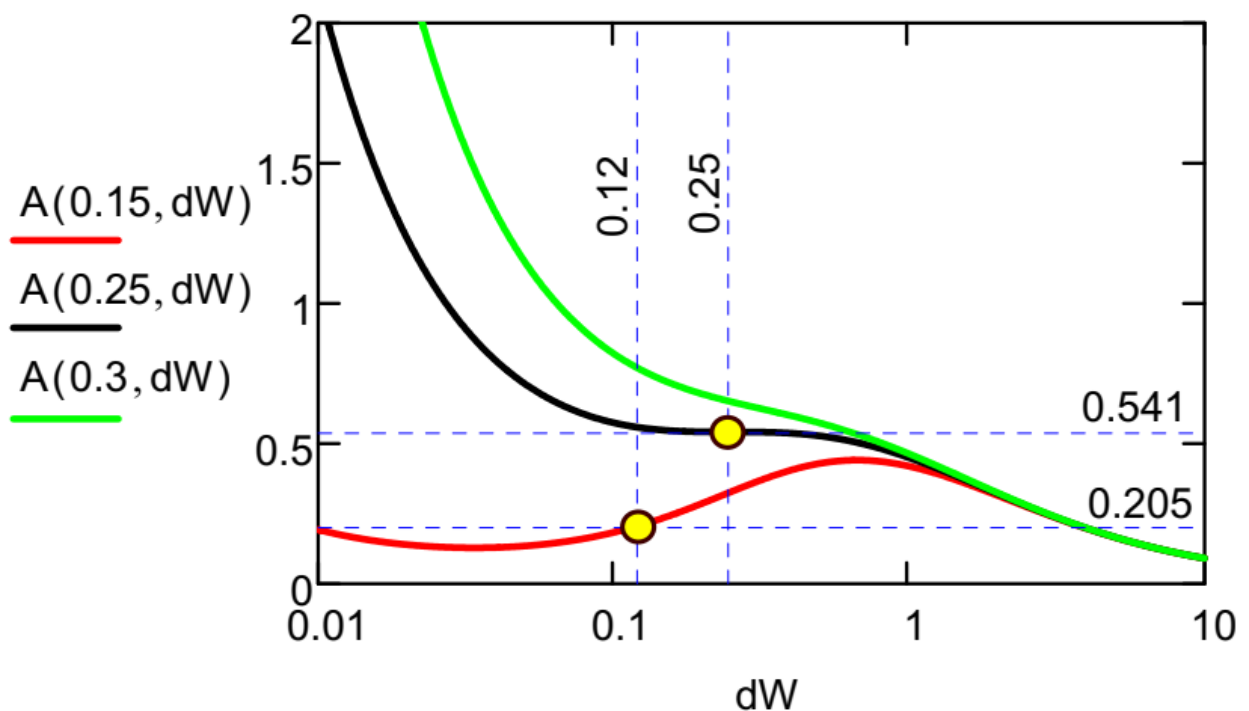


Рис. 1.5. Представлення множини рівноважних станів у формі $A = A(W_f, dW)$, $A = 0.541$, $W_f = 0.25$, $dW = 0.25$ – початкова критична точка; $A = 0.205$, $W_f = 0.15$, $dW = 0.12$ – приклад нестійкої точки рівноваги

Видно, що особливе положення займає крива $W_f = 0.25$, на якій вперше (якщо рухатися з боку великих W_f) з'являється **критична** точка – точка з горизонтальною дотичною. Ця початкова критична точка (з координатами $A_{cr} = 0.541$; $W_{fcr} = 0.25$; $W_{cr} = W_{fcr} + dW_{cr} = 0.25 + 0.25 = 0.5$)

являється точкою перегину – в ній перетворюється в нуль також друга похідна. При менших значеннях, $W_f < W_{fcr}$, з початкової критичної точки утворюються дві критичні точки – точка мінімуму і точка максимуму з точкою перегину між ними. При великих значеннях $W_f > W_{fcr}$ критична точка перетворюється в звичайну точку перегину.

Розрахунки, пов'язані з рис. 1.5, знаходяться в рамках елементарного аналізу особливих точок, але вони можуть вимагати громіздких перетворень в зв'язку з двократним диференціюванням функцій та необхідністю розв'язку систем рівнянь. Доцільно дану роботу виконати в програмному пакеті MathCad, що значно прискорить рутини розрахунки.

Нагадаємо, що діаграма на рис. 1.5 пов'язує положення **рівноважних точок** W (або dW) зі значеннями **керуючих параметрів** A і W_f . Тому результати аналізу можна виразити наступним чином. Якщо параметр A знаходиться між мінімумом і максимумом (тобто між критичними точками), то є три точки рівноваги – дві стійкі і одна нестійка між ними (наприклад, горизонтальна лінія $A_{cr} = 0.205$ перетинає криву $W_f = 0.15$ в трьох точках). В протилежному випадку є тільки одна точка рівноваги. Користь цього елементарного аналізу особливих точок полягає в тому, що по значенням керуючих параметрів можна **якісно** передбачити поведінку системи, тобто відповісти на наступні питання:

- до якого рівноважного стану буде прямувати система, що еволюціонує із заданого початкового стану;
- скільки всього є точок рівноваги для системи, що розглядається;
- які з них являються стійкими і які нестійкими, тобто практично неможливими для реалізації.

На практиці головним буде питання про те, чи є серед точок рівноваги небезпечні стани, потрапляння до область тяжіння котрих слід в будь-якому випадку запобігти.

1.5. Побудова біфуркаційної діаграми

Знайдемо біфуркаційну множину керуючих параметрів, при переході через які змінюється вид фазового портрету, тобто змінюється число і характер точок рівноваги. Походження терміну «біфуркація» (*bifurcation* - розгалуження, роздвоєння) наступне: при переході через границю утворюється ще одна точка рівноваги, яка потім роздвоюється, утворюючи одну стійку і одну нестійку точки.

З попереднього параграфу зрозуміло, що задача зводиться до відображення критичних точок на площині керуючих параметрів.

Диференціювання функції, заданої відношенням (1.4), по змінній стану dW з подальшим прирівнюванням похідної до нуля приводить до квадратного рівняння $dW^2 + (2W_f - 1)dW + W_f^2 = 0$, обидва варіанти розв'язку якого підставимо у вираз (1.4), з тим, щоб отримати біфуркаційну множину на площині керуючих параметрів (A, W_f) . Результати цих розрахунків у вигляді криволінійного клину з вершиною в початковій критичній точці ($A = 0,541$, $W_f = 0.25$) показані на рис. 1.6.

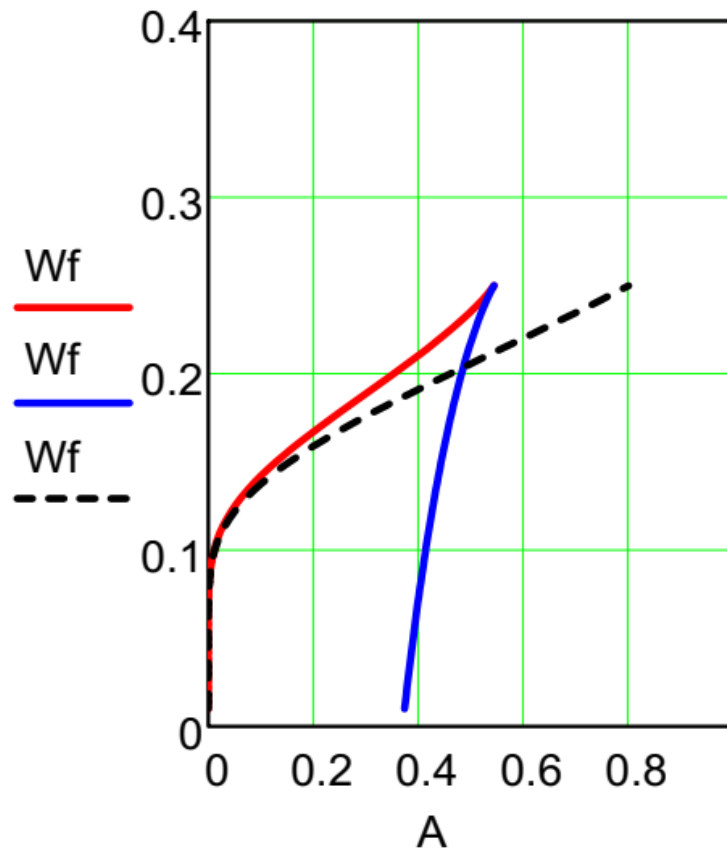


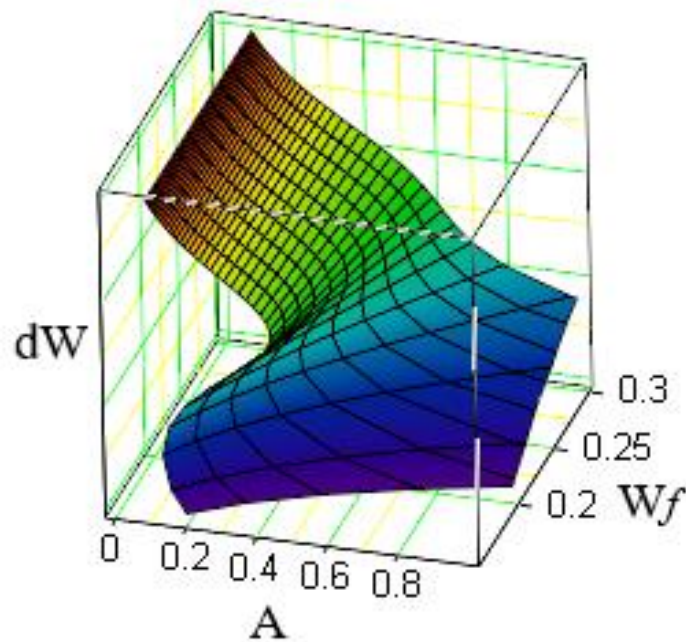
Рис. 1.6. Біфуркаційна діаграма і критерій теплового спалаху М. М. Семенова

Всередині криволінійного клину на фазовому портреті є три точки рівноваги, тобто три значення рівноважної температури, середнє з яких відповідає нестійкому стану. За межами клину кожній точці (A, W_f) відповідає один стійкий стан. При переході через межу всередину клину спостерігається розгалуження розв'язків. Пунктирною лінією показана границя, що відповідає критерію теплового спалаху [1].

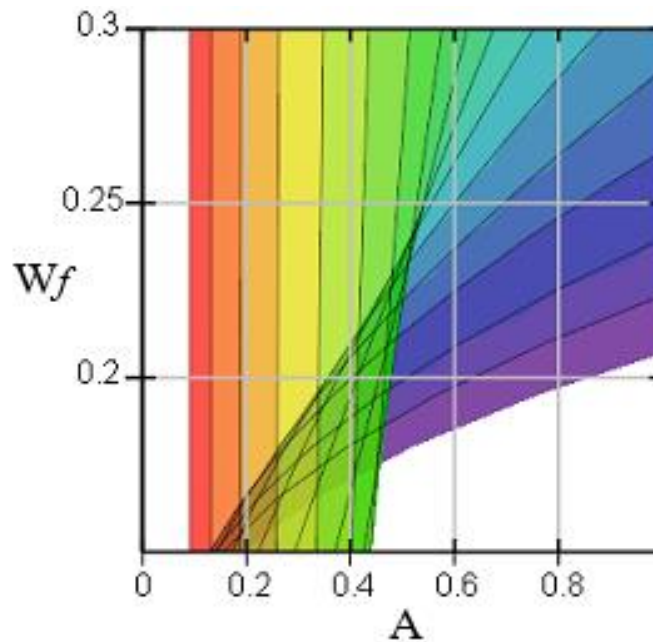
1.6. Тривимірне представлення рівноважних станів у формі «катастрофи збірки»

Умови рівноваги системи, записані вище у формі співвідношень (1.3) або (1.4) можна розглядати як неявну форму функціональної залежності змінної стану, тобто рівноважною температурою системи W (або надлишкової

температури dW), від керуючих параметрів – коефіцієнта тепловіддачі A і температури навколишнього середовища W_f : $dW = dW(A, W_f)$. Натурним представленням цієї залежності буде поверхня в тривимірному просторі (рис. 1.7). Її неважко побудувати як **параметричний** графік в MathCad, використовуючи співвідношення (1.4).



a



б

Рис. 1.7. Поверхня рівноваги станів

a – вид збоку; *б* – вид зверху

Отримана поверхня має назву **катастрофи збірки**. Наявність збірки призводить до неоднозначності функції, виникненню декількох (трьох) точок рівноваги, як це видно на рис. 1.7,*a*. Локалізація області параметрів, в якій є

неоднозначність, особливо добре визначається на рис. 1.7,б – ця проекція відтворює біфуркаційну діаграму (рис. 1.6). Назва «катастрофа» використовується тому, що вказана форма поверхні рівноваги зумовлює можливість стрибкоподібного, катастрофічного розвитку системи.

1.7. Стрибки станів при плавних змінах параметрів

Зміни стану системи можна розглядати в двох аспектах:

- як *тимчасову* еволюцію з деякого початкового стану *при заданих сталих значеннях керуючих параметрів*;
- як перехід з одного рівноважного стану в інший *при зміні керуючих параметрів*;

Область зміни параметрів (A , W_f) ділиться біфуркаційною діаграмою на дві підобласті. Всередині криволінійного клину (див. рис. 1.6 і 1.8) кожній парі параметрів (A , W_f) відповідає три стаціонарних (рівноважних) стани: два стійких і один нестійкий. Поза клином кожній парі параметрів (A , W_f) відповідає єдиний стійкий стаціонарний стан.

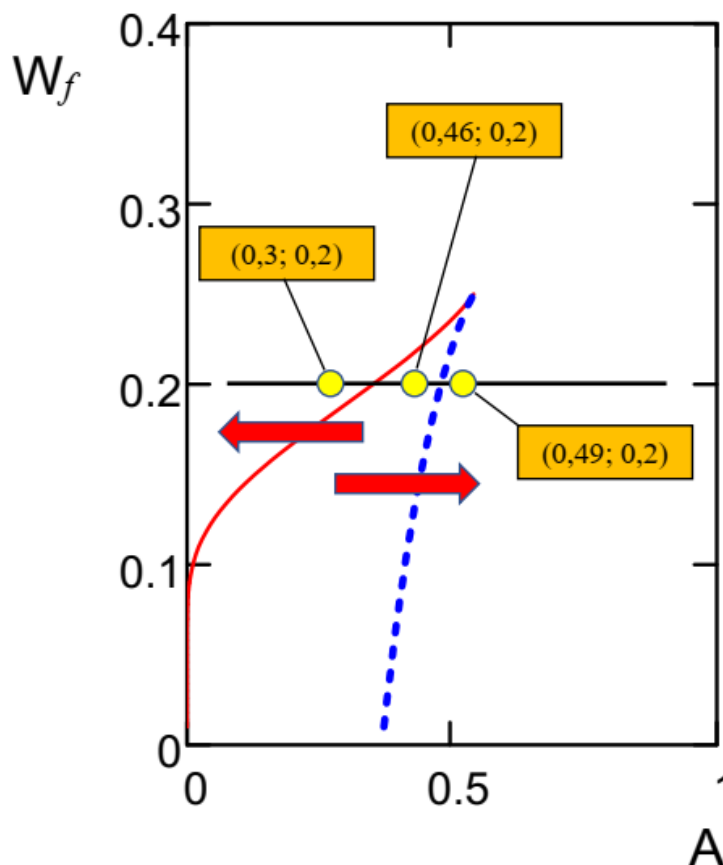


Рис. 1.8. Біфуркаційна діаграма

Такий поділ області керуючих параметрів призводить до особливої поведінки системи при переході через межу, а саме, плавна, безперервна зміна

параметрів викликає стрибкоподібну, катастрофічну зміну змінної стану (температури об'єкту в модельній задачі). Стрілка, направлена з області клину *направо* (див. рис. 1.8), описує *стрибкоподібне* зменшення температури, якщо *плавно* збільшувати коефіцієнт тепловіддачі A . Представлення цього процесу на тривимірній діаграмі рівноважних станів дано на рис. 1.9. Стрибок показаний стрілкою, що направлена донизу. Умовно цей перехід можна інтерпретувати як гасіння вогню, якщо тепловідвід в навколишнє середовище став занадто великим.

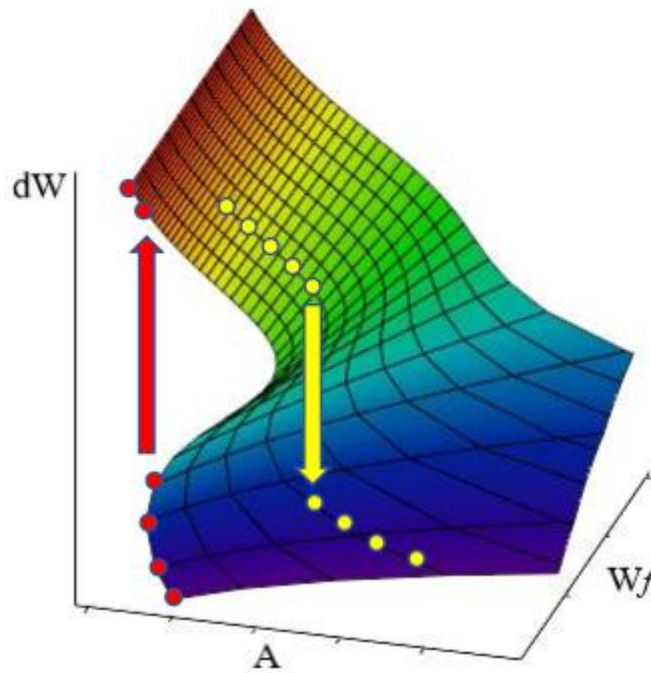


Рис. 1.9. Катастрофа збірки: стрибки, що відповідають займанню (вибуху) і гасінню полум'я

Якщо плавно зменшувати коефіцієнт тепловіддачі A , знаходячись на нижній частині рівноважної поверхні, то відбудеться стрибок з різким підвищенням температури, як показано на рис. 1.8 стрілкою, що виходить з області клину наліво, а на рис. 1.9 – стрілкою, що направлена доверху. Цей перехід інтерпретується як самозаймання, тобто швидке зростання швидкості хімічної реакції, що призводить до займання без спеціального пристрою запалювання.

Критерій теплового займання М. М. Семенова [1], отриманий для певного граничного випадку малої температури навколишнього середовища і малої надлишкової температури об'єкту, записується наступним чином

$$\frac{e}{A} \frac{1}{W_f^2} \exp\left(-\frac{1}{W_f}\right) = 1$$

Положення цієї межі на біфуркаційній діаграмі показано на рис. 3.6 штриховою лінією. Як й очікувалося, спостерігається відповідне узгодження з результатами загальних розрахунків для асимптотичного випадку малих значень приведеної температури навколишнього середовища (при $W_f < 0.1$).

В теорії катастроф вказується ряд важливих явищ і властивостей, що відповідають складним реальним об'єктам і які можуть бути пояснені на основі аналізу рівноважної поверхні типу збірки [2]. Перше з них було обговорено вище: це виникнення *катастрофічних, стрибкоподібних* змін стану при *плавній* зміні керуючих параметрів. Іншу важливу властивість можна назвати *гістерезисом*. На рис. 1.9 видно, що після стрибка вгору необхідно значно просунутися по верхній частині поверхні в напрямку збільшення A , щоб повернутися стрибком на нижню частину поверхні.

Завершивши аналіз рівноважних станів, перейдемо до дослідження часової еволюції системи, якщо значення керуючих параметрів знаходяться в різних областях, розділених біфуркаційними лініями.

1.8. Часова еволюція системи з тепловиділенням

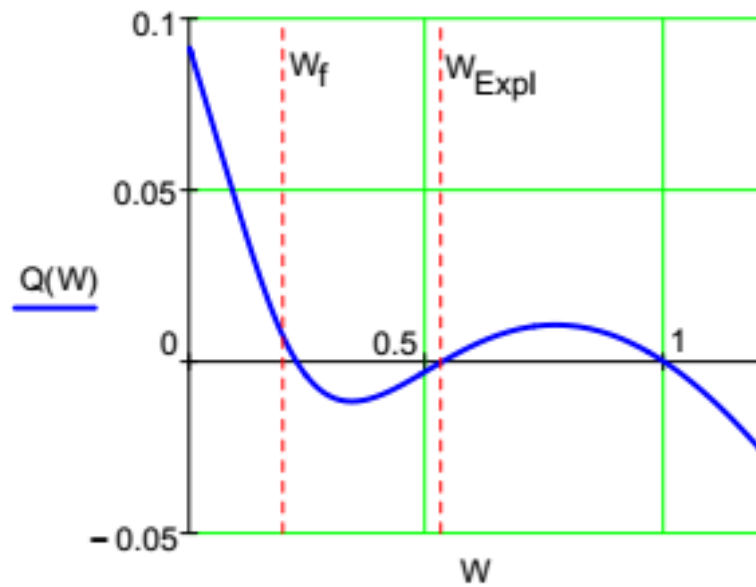
Розглянемо три приклади часової еволюції для трьох комбінацій керуючих параметрів (A, W_f) , показаних на рис. 1.8 жирними точками.

В першому прикладі точка $(A, W_f) = (0.46; 0.2)$ знаходиться всередині криволінійного клину на біфуркаційній діаграмі (рис. 1.8). Тут є три стаціонарних стани: два стійких – при низькій і при високій температурі і один нестійкий – при проміжному значенні температури (рис. 1.10, *а*). Часова еволюція (рис. 1.10, *б*) з різних початкових станів розраховувалась за допомогою чисельного інтегрування диференціального рівняння (1.2) вбудованим в MathCad методом *rkadapt* (з кроком інтегрування, що адаптується).

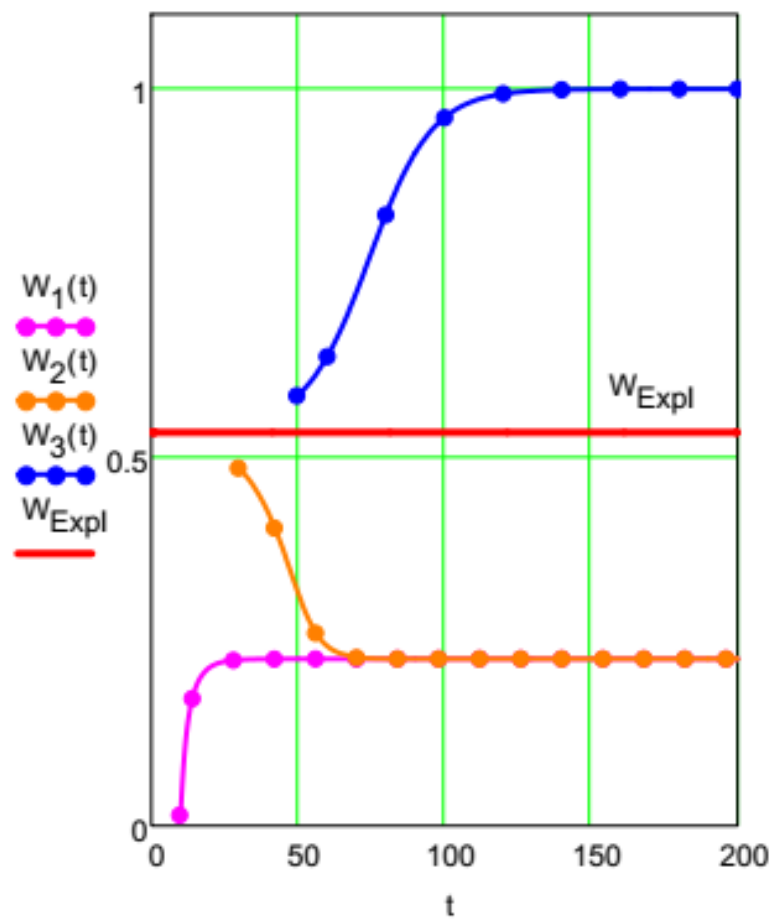
Значення температури в нестійкій точці $W_{Expl} = 0.533$ є границею між областями тяжіння до стаціонарного стану з низькою або високою температурою. Тому значення $W_{Expl} = 0.533$ можна умовно назвати температурою займання. Два режими, що стартують практично з однієї і тієї ж температури, близької до W_{Expl} , потім дуже сильно розходяться, тобто є потужна, розривна залежність результату від початкового стану.

Два інших приклади мають на біфуркаційній діаграмі по одному стійкому стаціонарному стані відповідно для $(A, W_f) = (0.49; 0.2)$ при низькій (рис. 1.11) і для $(A, W_f) = (0.3; 0.2)$ – при високій температурі (рис. 1.12). Останній режим може бути названий самозайманням, оскільки в будь-якому

випадку, незалежно від рівня початкової температури, настає період різкого росту швидкості хімічної реакції і температури.

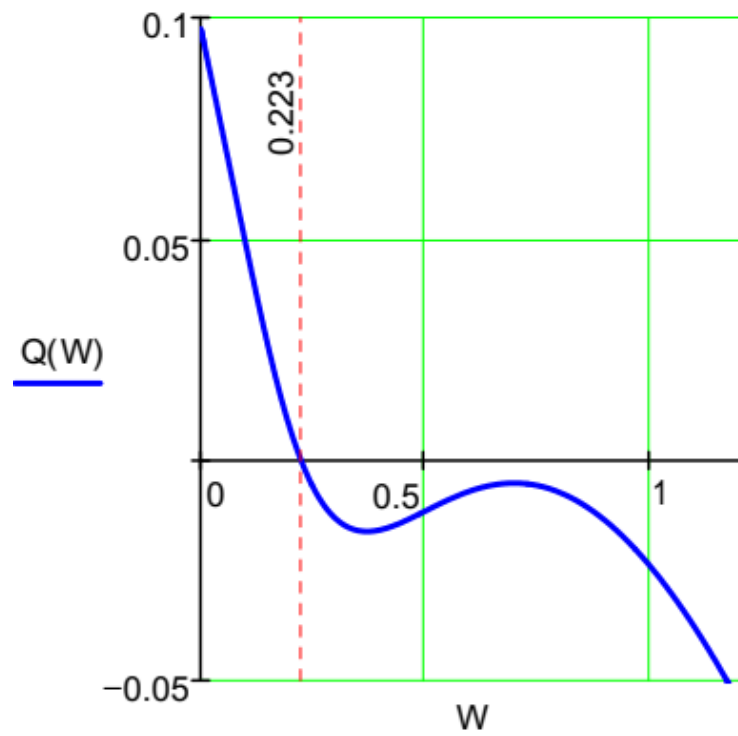


a

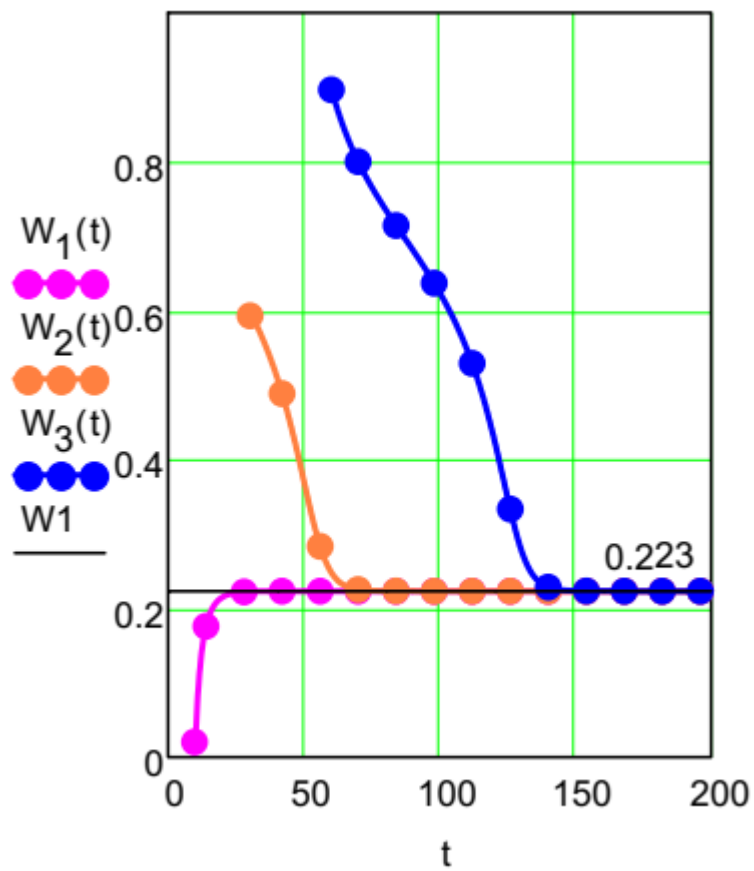


б

Рис. 1.10. Права частина диференціального рівняння (1.2) (*a*) і часова еволюція (*б*) у випадку трьох рівноважних станів

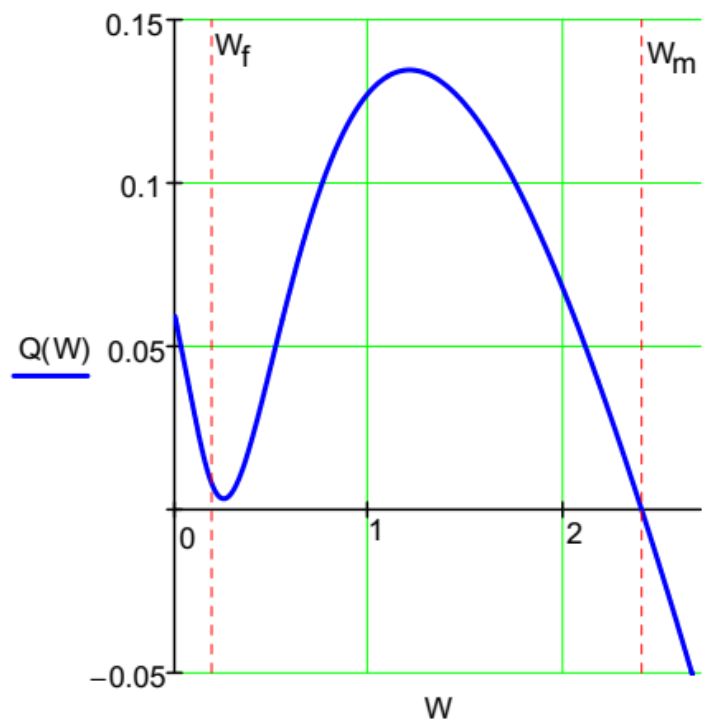


a

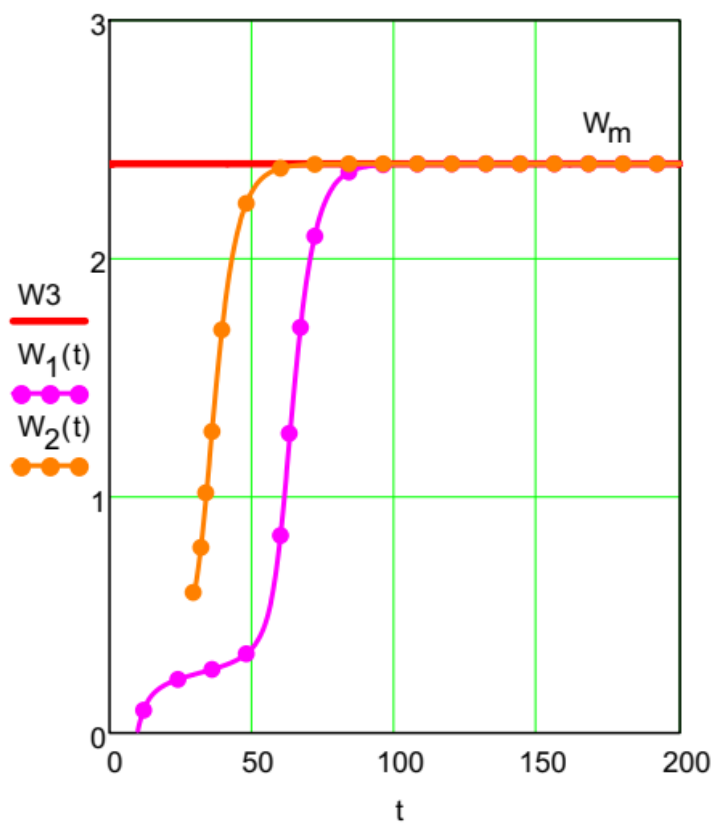


б

Рис. 1.11. Права частина диференційного рівняння (1.2) (*a*) і часова еволюція (*б*) у випадку одного рівноважного стану при низькій температурі



a



б

Рис. 1.12. Права частина диференційного рівняння (1.2) (*a*) і часова еволюція (*б*) у випадку одного рівноважного стану при високій температурі (самозаймання, вибух)

1.9. Висновок

Зазвичай великі технічні системи працюють на стаціонарних режимах при деяких штатних, оптимальних значеннях параметрів. Якщо, тим не менш, режим роботи повинен бути змінений, то при безперервній, плавній зміні керуючих параметрів початковий стійкий стаціонарний стан повинен заміщатися деяким новим, але близьким до початкового і також стійким рівноважним станом. Це розумна вимога до технічної системи, що забезпечує надійність і безпеку експлуатації.

Дійсно, якщо невеликі зміни керуючих параметрів призводять до невеликих змін в стані системи, то оператор, помітивши несприятливу реакцію, може завжди повернутися назад, поставивши «ручки керування» в початкове положення.

Однак навіть така обережна поведінка не гарантує безпеки. Проблема полягає в тому, що описана вище неперервність може порушуватися. Може статися, що невелика зміна керуючого параметру перетворить новий стаціонарний (рівноважний) стан у нестійкий, а потім часова еволюція змістить систему в надзвичайно (небезпечно) далекий новий стан. Враховуючи властивість гістерезису, для повернення знадобиться зовсім інший і, можливо, довгий шлях (тобто доведеться значно змінювати значення керуючих параметрів, щоб повернутися до початкового стану).

2. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ОКОЛІ КРИТИЧНОЇ ТОЧКИ ПОПЕРЕЧНО ОБТІЧНОЇ ТРУБИ

2.1 Постановка задачі

Коли високотемпературний потік газу обтікає труби пароперегрівача в парогенераторі теплової електричної станції або охолоджувані лопатки газових турбін, найбільш небезпечні температурні умови частіше всього виникають в передній критичній точці – точці розгалуження потоку (рис. 2.1).

Аналіз локальної теплопередачі в цих умовах представляє собою складну проблему, оскільки плин течії відбувається в полі змінного тиску, а теплові граничні умови на стінці можуть відрізнятися від формулювань, що зазвичай використовуються за умов постійної температури або щільності теплового потоку.

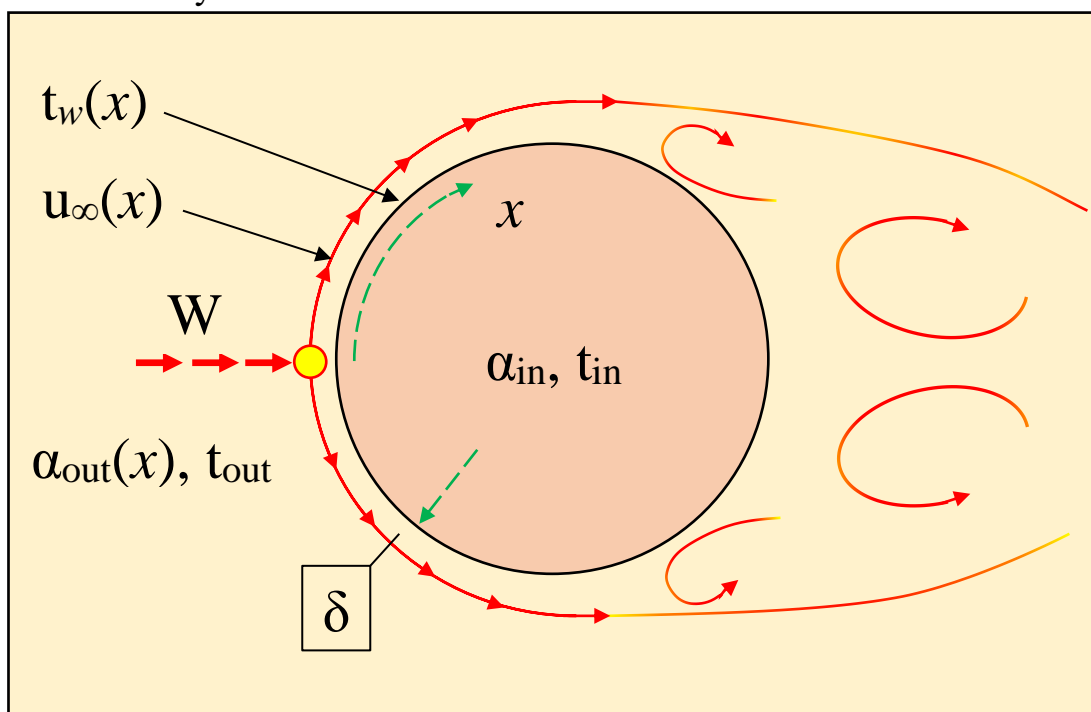


Рис. 2.1. Схема тепловіддачі через стінку поперечно обтічної труби

В інженерній розрахунковій практиці для рішення таких спеціальних задач тепломасообміну – зі складними граничними умовами, зовнішніми впливами (прискоренням або уповільненням потоку, вдувом або відсмоктуванням через проникну стінку) – може бути використаний метод **інтегральних співвідношень** пограничного шару [3-7]. Математичний апарат інтегрального методу – розв’язок звичайних диференціальних рівнянь і нелінійних алгебраїчних рівнянь. Програмний пакет MathCad надає для цього весь необхідний математичний арсенал.

2.2. Інтегральне рівняння теплового пограничного шару

Поняття пограничного шару буде більш докладно висвітлене в наступному розділі. Зараз же нам буде достатньо загального представлення про те, що зміни швидкості і температури в потоці зазвичай зосереджуються в тонкому шарі поблизу стінки. Для потоків в пограничному шарі зміни всіх величин в поперечному до стінки напрямку (по координаті y) будуть дуже різкими в порівнянні з повздовжніми змінами (вздовж x).

Інтегральне рівняння теплового пограничного шару представляє собою формулювання закону збереження енергії для спеціального контрольного об'єму, що охоплює всю товщину пограничного шару і диференціально малого в повздовжньому напрямку.

Найпростіший спосіб виводу рівняння енергії оснований на модельному представленні теплового пограничного шару (рис. 2.2). Обтічна стінка показана як проникна, для достатнього узагальнення постановки задачі. Наприклад, придатною для аналізу захисту поверхні від високотемпературного потоку за допомогою вдуву.

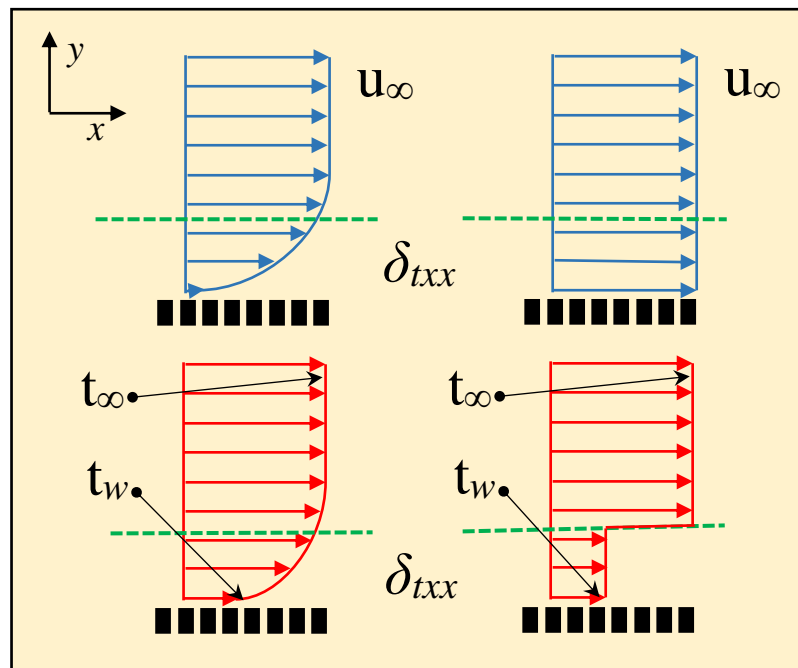


Рис. 2.2. Модельне представлення теплового пограничного шару

В лівій частині рис. 2.2 показано **дійсний** розподіл швидкості і температури в пограничному шарі, а в правій – **модельне**, еквівалентне по тепловмісту їх представлення. Для визначеності приймають, що вздовж поверхні рухається гаряча рідина, що віддає тепло холодній стінці. Вважають, що в шарі товщиною δ_{txx} рідина повністю охолоджується до температури холодної стінки t_w ; одночасно приймають, що швидкість рідини залишається

рівною швидкості зовнішнього потоку u_∞ безпосередньо до самої стінки. Тоді витрата рідини, що повністю «**втратила**» надлишкову по відношенню до холодної стінки ентальпію, розраховується як $(\rho u_\infty \delta_{txx})$. Величина δ_{txx} слугує мірою товщини теплового пограничного шару і називається **товщиною втрати ентальпії**.

Її визначення задається наступним виразом:

$$\int_0^\infty c_p(t_\infty - t(y))\rho u(y)dy \equiv (\rho u_\infty \delta_{txx})c_p(t_\infty - t_W),$$

в лівій частині якого – точний опис втрати ентальпії потоком рідини в межах теплового пограничного шару, а в правій – модельне представлення цієї величини.

Таким чином, згідно з визначенням

$$\delta_{txx} = \frac{\int_0^\infty \rho c_p u(y)(t_\infty - t(y))dy}{\rho u_\infty c_p(t_\infty - t_W)} \quad (2.1)$$

Після цих попередніх зауважень можна безпосередньо записати інтегральне рівняння енергії для теплового пограничного шару як тепловий баланс

$$\frac{d}{dx} [\rho u_\infty \delta_{txx} c_p(t_\infty - t_W)] = -q_W + j_W c_p(t_\infty - t_W), \quad (2.2)$$

згідно якому збільшення втрати ентальпії (ліва частина рівняння) при русі рідини вздовж холодної стінки відбувається внаслідок тепловідводу до стінки (перший доданок справа) й витрат на підігрів від t_W до t_∞ теплоносія, що вдувається (другий доданок справа). Таке формулювання закону збереження справедливе для відносно повільних течій, коли можна знехтувати впливом кінетичної енергії на загальний баланс, так само і теплотою дисипації («нагрівом» за рахунок в'язкого тертя).

Позначення в правій частині інтегрального рівняння розшифровуються наступним чином: $(-q_W)$ – кондуктивний (обумовлений теплопровідністю) тепловий потік до стінки, j_W – щільність потоку маси на проникній границі при вдуванні через перфоровану стінку або при масопереносі на поверхні поділу.

Рівняння теплового пограничного шару (2.2) містить дві невідомі величини. Якщо в якості граничної умови на стінці задається температура поверхні, то шуканими величинами являються товщина втрати ентальпії δ_{txx} і щільність теплового потоку на стінці q_W ; якщо задана величина q_W , то знаходяться δ_{txx} і t_W . Необхідне додаткове співвідношення між невідомими величинами задається законом теплообміну [див. співвідношення (2.8)].

При інтегруванні рівняння (2.2) вздовж обтічної поверхні (вздовж x) повинна бути поставлена початкова умова [див. умову (2.9)].

Необхідно зробити наступне зауваження щодо математичної структури рівняння (2.2). Очевидно, що воно являється інтегродиференціальним рівнянням, оскільки величина δ_{txx} яка знаходиться під знаком диференціювання є інтегралом від апіорі невідомих розподілів швидкості і температури. Ефективність інтегрального методу полягає в тому, що вдається встановити алгебраїчні співвідношення між інтегральною характеристикою δ_{txx} і щільністю теплового потоку на стінці [див. співвідношення (2.8)]. Завдяки цьому в рамках інтегрального методу з рівнянням (2.2) працюють як із звичайним диференціальним рівнянням першого порядку.

Нижче показано формальне виведення рівняння теплового пограничного шару.

В якості початкового використаємо співвідношення рівняння енергії (докладно описано в [8], гл.1)

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\text{div}(-\lambda \text{grad } t) - \rho c_p w \text{grad } t + q_v,$$

записане для стаціонарної задачі без внутрішніх джерел:

$$0 = -\text{div}(-\lambda \text{grad } t) - \text{div}(\rho w h).$$

В двовимірній постановці, з врахуванням позначень (u, v) для поздовжньої і поперечної проекції швидкості маємо:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) - \frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v h)}{\partial y}$$

Для пограничного шару:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \ll \frac{\partial t}{\partial y}; q \approx q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}.$$

Центральним моментом виведення являється інтегрування по поперечній координаті:

$$\int_0^\infty \frac{\partial(\rho u(h - h_\infty))}{\partial x} dy + \int_0^\infty \frac{\partial(\rho v(h - h_\infty))}{\partial y} dy = - \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial y} q_v \right) dy$$

Щоб невластні інтеграли були збіжними, для ентальпії h в якості точки відліку прийнята величина h_∞ для потоку на віддалені від стінки. Вводячи для величини на стінці мнемонічний індекс «w» (англ. wall – стінка), отримаємо після інтегрування:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho u(h_\infty - h) dy = -q_{y,w} + \rho v_w(h_\infty - h_w).$$

Далі вводиться поняття товщини втрати ентальпії δ_{txx} :

$$\int_0^{\infty} \rho u (h_{\infty} - h) dy = \rho u_{\infty} \delta_{txx} c_p (t_{\infty} - t_W)$$

і записується інтегральне рівняння в кінцевому вигляді

$$\frac{d}{dx} [\rho u_{\infty} \delta_{txx} c_p (t_{\infty} - t_W)] = -q_{y,w} + \rho v_W (h_{\infty} - h_W) \quad (5.3)$$

Рівняння (2.3) і (2.2) ідентичні, оскільки $q_{y,w} \equiv q_W, \rho v_W = j_W$.

Інтегральний метод можна розглядати як спосіб наближеного інтегрування рівнянь в **приватних** похідних за допомогою їх редукції (зменшення кількості незалежних змінних) до **звичайних** диференціальних рівнянь.

2.3. Математичний опис задачі

Задача формулюється наступним чином (рис. 2.1). Необхідно знайти розподіл коефіцієнта тепловіддачі на зовнішньому боці $\alpha_{out}(x)$ по окружності труби, температури стінки труби $t_W(x)$ і щільності теплового потоку $q(x)$. Координата x відраховується від передньої критичної точки вздовж окружності труби. Величини коефіцієнту тепловіддачі α_{in} і температури теплоносія t_{in} на внутрішньому боці вважаються заданими значеннями, так само як і температура t_{out} і швидкість набігаючого потоку W для зовнішнього теплоносія. Відмітимо, що температуру зовнішнього теплоносія t_{out} буде використано як t_{∞} в рівнянні пограничного шару, а індекс « ∞ » замінимо на «inf», щоб задовольнити потреби запису змінних в обчислювальних програмах.

Математичний опис задачі включає:

- рівняння теплопередачі:

$$q(x) = \frac{(t_{out} - t_{in})}{\frac{1}{\alpha_{out}(x)} + \frac{1}{\alpha_i}}; \quad (2.4)$$

- рівняння тепловіддачі на зовнішньому боці:

$$q(x) = \frac{(t_{out} - t_W(x))}{\frac{1}{\alpha_{out}(x)}}; \quad (2.5)$$

- рівняння теплового пограничного шару на зовнішній поверхні труби:

$$\frac{d}{dx} [\rho u_{inf}(x) \delta_{txx}(x) c_p (t_{out} - t_W(x))] = q(x), \quad (2.6)$$

де $\delta_{txx}(x)$ – товщина втрати ентальпії;

- розподіл швидкості зовнішнього потоку по окружності труби в околі передньої критичної точки:

$$u_{\text{inf}}(x) \equiv 2W \sin\left(\frac{x}{R}\right); \frac{x}{R} < \frac{\pi}{4}; \quad (2.7)$$

- стандартний закон теплообміну для ламінарного пограничного шару:

$$\frac{\alpha_{\text{out}}(x)}{(\rho u_{\text{inf}}(x) c_p)} = \frac{0.22}{\text{Pr}^{4/3}} \frac{1}{\left(\frac{u_{\text{inf}}(x) \delta_{txx}(x)}{v}\right)}; \quad (2.8)$$

- граничні умови в критичній точці (умови симетрії):

$$\frac{d}{dx} \delta_{txx}(0) = 0; \quad \frac{d}{dx} \theta_w(0) = 0, \quad (2.9)$$

де $t_{\text{out}} - t_w(x) = \theta_w(x)$.

Відповідно до рівняння (2.4), потік теплоти під дією різниці температур (різниці потенціалів) направляєється від гарячого теплоносія зовні труби до холодного теплоносія всередині труби, проходячи через термічні опори $1/\alpha_{\text{out}}$ і $1/\alpha_{\text{in}}$. Цей опис нагадує просту задачу з електротехніки, а співвідношення (2.4) – формулювання закону Ома для послідовного ланцюга. Проблема полягає в тому, що зовнішній термічний опір невідомий. Він являється складною функцією геометрії системи, швидкості потоку, фізичних властивостей теплоносія тощо. Математичне моделювання опору $1/\alpha_{\text{out}}$ (або провідності, тобто коефіцієнта тепловіддачі α_{out}) – центральне місце теорії, що розглядається.

Практично основна мета розрахунку – визначення щільності теплового потоку в залежності від деякого списку параметрів (наприклад, від швидкості теплоносія і радіуса труби). Зазвичай конструктори намагаються отримати більше значення потоку, з тим, щоб зменшити габарити і масу громіздких теплообмінних пристроїв. Не менш важливою є задача розрахунку температури поверхні труби, з тим, щоб не допустити перевищення допустимого значення, залежного від термостійкості матеріалу, тиску в трубі тощо.

Як буде зрозуміло з подальшого, задача зводиться до численного рішення рівняння теплового пограничного шару (2.6). По фізичному складу це рівняння представляє собою тепловий баланс для потоку рідини поблизу стінки. Величина в квадратних дужках в лівій частині називається **втратою ентальпії** (тепломісткості), оскільки потік $\rho u_{\text{inf}} \delta_{txx}$ охолоджується від температури **гарячого** газу t_{out} до більш низької температури стінки t_w . Похідна в лівій частині вказує, що втрата ентальпії зросте при русі газу вздовж холодної стінки завдяки тепловідводу $q(x)$ до стінки. Фізичну суть цієї задачі розглянуто в попередньому параграфі.

2.4 Розподілення швидкості зовнішнього потоку по окружності труби

Як видно з рівнянь (2.6) і (2.8), для розв'язку задачі нам необхідне розподілення швидкості по обводу циліндра в зовнішньому потоці. Це розподілення з задовільною точністю можна отримати з розв'язку класичної задачі про ідеальне (нев'язке, безвідривне) обтікання циліндру. Комплекснозначна функція, що визначає вектор комплексно спряженої швидкості, записується як

$$W_{(z)} = 1 - \frac{1}{z^2} \quad (2.10)$$

Де $z = x+iy$; i - уявна одиниця; x, y - координати.

Задамо квадратну сітку і вирахуємо повздовжню і поперечну складову вектору швидкості для області поза кругом одиничного радіусу за допомогою функції **if**, як це вказано на рис. 2.3.

Для графічного представлення векторного поля швидкості слід використати послідовно пункти меню **Insert, Graph, Vector Field Plot** і вставити замість плейсхолдера позначення обчислювальних масивів (U, V), що задають проекції швидкості. Результат показано на рис. 2.4.

```

W(z) := 1 - 1/z^2

n := 10                                i := 0.. n                            j := 0.. n
x_i := (i - n/2) * 4/n                  y_j := (j - n/2) * 4/n                  z_i,j := x_i + i*y_j

U_i,j := if(|z_i,j| >= 1, Re(W(z_i,j)), 0)
V_i,j := if(|z_i,j| >= 1, -Im(W(z_i,j)), 0)

```

Рис. 2.3. Лістинг програми обчислення векторного поля швидкості

Реальна течія в кормовій частині сильно відрізняється від цієї картини в наслідок відриву пограничного шару приблизно в середньому перетині циліндру (див. рис. 2.1). Однак в лобовій частині ідеальний потік дає досить достовірне уявлення для реального потоку. Відмітимо, що мова йде про потік за межами тонкого пограничного шару поблизу поверхні циліндру.

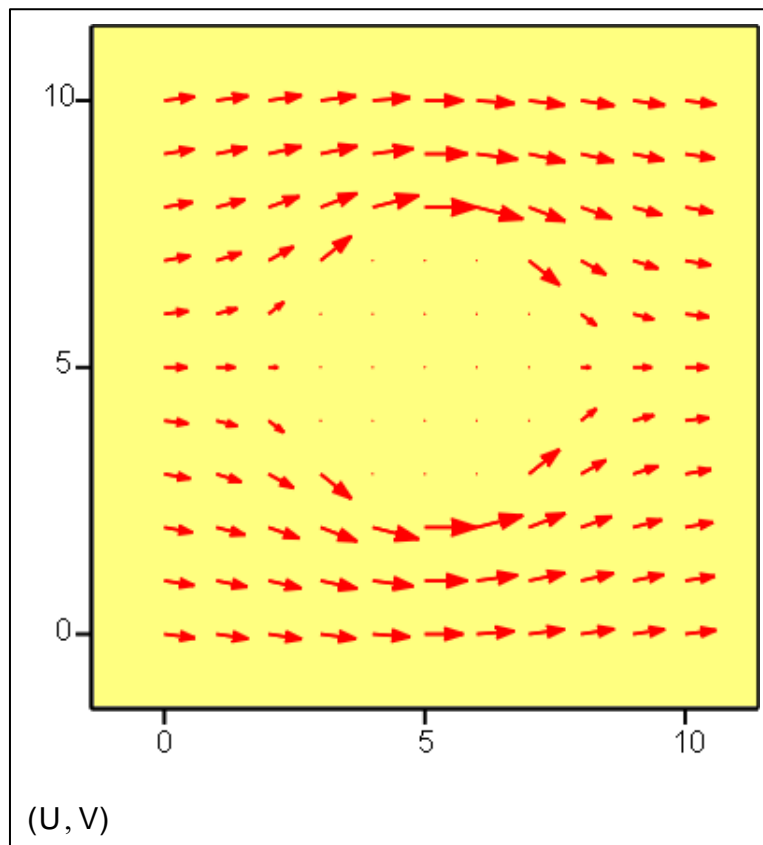


Рис. 2.4 Векторне поле швидкості при обтіканні циліндра

Задовільну апроксимацію для швидкості вздовж обтічної поверхні (на зовнішній границі пограничного шару) при не надто великих значеннях числа Рейнольдса дає функція, що побудована на умовному операторі **if** (рис. 2.5).

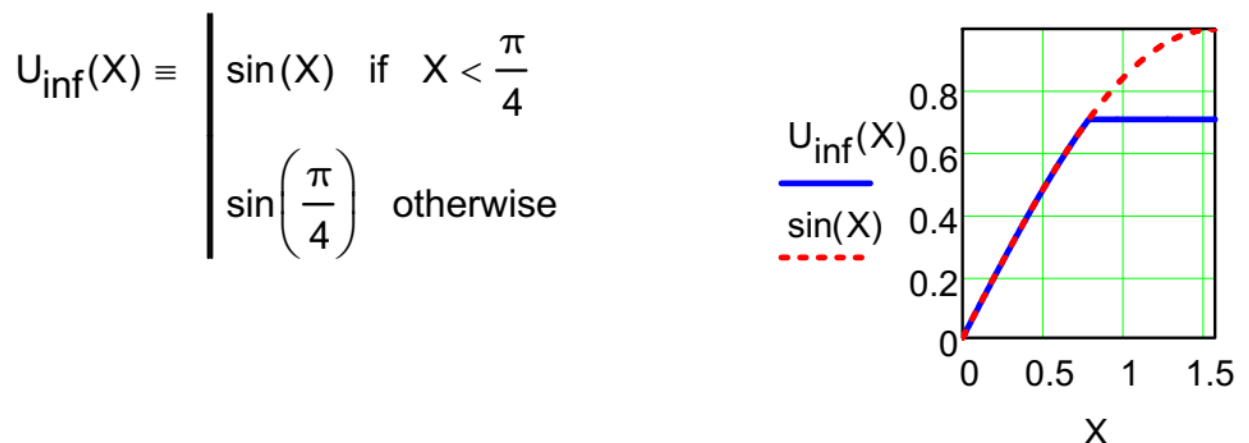


Рис. 2.5. Розподілення швидкості зовнішнього потоку для пограничного шару в лобовій частині циліндру

Синусоїдальна залежність отримується з (2.10), якщо провести обчислення для точок на поверхні циліндру. Ця функція використовується далі при інтегруванні рівняння (2.6).

2.5. Виведення співвідношень для критичної точки

Безпосередньо для критичної точки (при $x=0$) прості, але доволі громіздкі (якщо їх проводити вручну) аналітичні перетворення приводять до наступних розрахункових формул:

$$St_{W0} = \frac{\alpha_{out}(0)}{\rho c_p W} = \frac{0,938}{Pr^{2/3} (\frac{2RW}{v})^{1/2}}; \frac{\delta_{t_{xx}}(0)}{R} = \frac{1}{2} \frac{0,938}{Pr^{2/3} (\frac{2RW}{v})^{1/2}} = \frac{1}{2} St_{W0} \quad (2.11)$$

Необхідні викладки, що включають в себе операції диференціювання, різноманітні підстановки і тотожні перетворення з метою спрощення результатів, були виконані символьним процесором MathCad, звільнивши нас від рутинної роботи. Коротко опишемо техніку цих символьних обчислень.

Ідея першого етапу цього аналізу полягає в тому, щоб записати диференційне рівняння (2.6) безпосередньо для критичної точки $x=0$ і отримати співвідношення між значеннями товщини пограничного шару і коефіцієнтом тепловіддачі в цій точці. Послідовність аналітичних перетворень рівняння (2.6) показана на лістингу MathCad-фрагменту (рис. 2.6):

- Перші два оператори **substitute** виконують підстановку двочленних розкладань для температури і товщини в безпосередньому околі критичної точки (при $x \rightarrow 0$). Такий вид розкладу впливає з граничних умов (2.9), згідно яким перші похідні в критичній точці перетворюються в нуль;
- Третій оператор проводить обчислення в критичній точці;
- Четвертий оператор робить заміну по рівнянню Ньютона – Ріхмана
- Оператор **factor** робить очевидною можливість скорочення на величину $\theta_W(0)$
- Оператор **solve** розв'язує рівняння відносно коефіцієнту тепловіддачі; результат показано в наступному рядку фрагмента лістинга.

На другому етапі спільно з тільки що отриманим співвідношенням для $\alpha_{out}(0)$ розглядається формула (2.8) стандартного закону теплообміну. Отримана система рівнянь відносно невідомих $\alpha_{out}(0)$ і $\delta_{t_{xx}}(0)$ вирішується символьним процесором MathCad за допомогою оператора **solve**. Результат розв'язку виведено як матрицю з чотирьох коренів системи, які і представлені в кінцевому виді формулами (2.11).

Співвідношення (2.11) дозволяють розрахувати значення коефіцієнта тепловіддачі і товщини теплового пограничного шару безпосередньо в критичній точці, виходячи із заданих величин швидкості набігаючого потоку, радіусу труби і властивостей теплоносія.

$$\begin{array}{l}
 u_{\text{inf}}(x) \equiv 2 \cdot W \cdot \sin\left(\frac{x}{R}\right) \\
 \frac{d}{dx}(\delta_{\text{txx}}(x) \cdot \theta_w(x) \cdot u_{\text{inf}}(x)) - \frac{q(x)}{\rho \cdot c_p} \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } \theta_w(x) = \theta_w(0) + a \cdot x^2 \\ \text{substitute, } \delta_{\text{txx}}(x) = \delta_{\text{txx}}(0) + b \cdot x^2 \\ \text{substitute, } x = 0 \\ \text{substitute, } q(0) = \alpha_{\text{out}}(0) \cdot \theta_w(0) \\ \text{factor} \\ \text{solve, } \alpha_{\text{out}}(0) \end{array} \right. \rightarrow \\
 2 \cdot \delta_{\text{txx}}(0) \cdot W \cdot \rho \cdot \frac{c_p}{R} \\
 \left(\begin{array}{l} \alpha_{\text{out}}(0) = 2 \cdot \delta_{\text{txx}}(0) \cdot W \cdot \rho \cdot \frac{c_p}{R} \\ \alpha_{\text{out}}(0) = \frac{0.22 \cdot c_p \cdot \rho \cdot \nu}{\delta_{\text{txx}}(0)} \cdot \text{Pr} - \frac{4}{3} \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } \left(\begin{array}{l} \alpha_{\text{out}}(0) \\ \delta_{\text{txx}}(0) \end{array} \right) \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \\
 \left[\begin{array}{cc} .663 \cdot \frac{(W \cdot \nu \cdot R)^{\frac{1}{2}}}{\text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \cdot \rho \cdot \frac{c_p}{R} & \frac{.331}{W} \cdot \frac{(W \cdot \nu \cdot R)^{\frac{1}{2}}}{\text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \\ -.663 \cdot \frac{(W \cdot \nu \cdot R)^{\frac{1}{2}}}{\text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \cdot \rho \cdot \frac{c_p}{R} & \frac{-.331}{W} \cdot \frac{(W \cdot \nu \cdot R)^{\frac{1}{2}}}{\text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Рис. 2.6. Лістинг програми виведення формули для тепловіддачі в критичній точці

Доцільно проілюструвати отримані результати на числових прикладах (рис. 2.7). Для розрахунку коефіцієнту тепловіддачі в критичній точці при різних значеннях швидкості потоку і радіусу труби застосовувалась формула (2.11). Співвідношення для температури стінки було отримано почленим діленням формули (2.5) на формулу (2.4). Теплофізичні властивості (щільність, теплоємність, в'язкість, число Прандтля) обрані з довідкових таблиць для продуктів згорання при 1000 °С. Існує можливість уточнення значення фізичних параметрів в додатковій ітераційній процедурі, обираючи

їх по середній температурі пограничного шару, а потім повторюючи розрахунок коефіцієнту тепловіддачі і температури стінки.

Графіки дають наочну і вельми корисну інформацію для проектувальника. Наприклад, добре видно, що збільшення швидкості обтікання може призвести до недопустимого підвищення температури труби в критичній точці. Вплив геометричного параметру – радіусу труби також відображено на діаграмах.

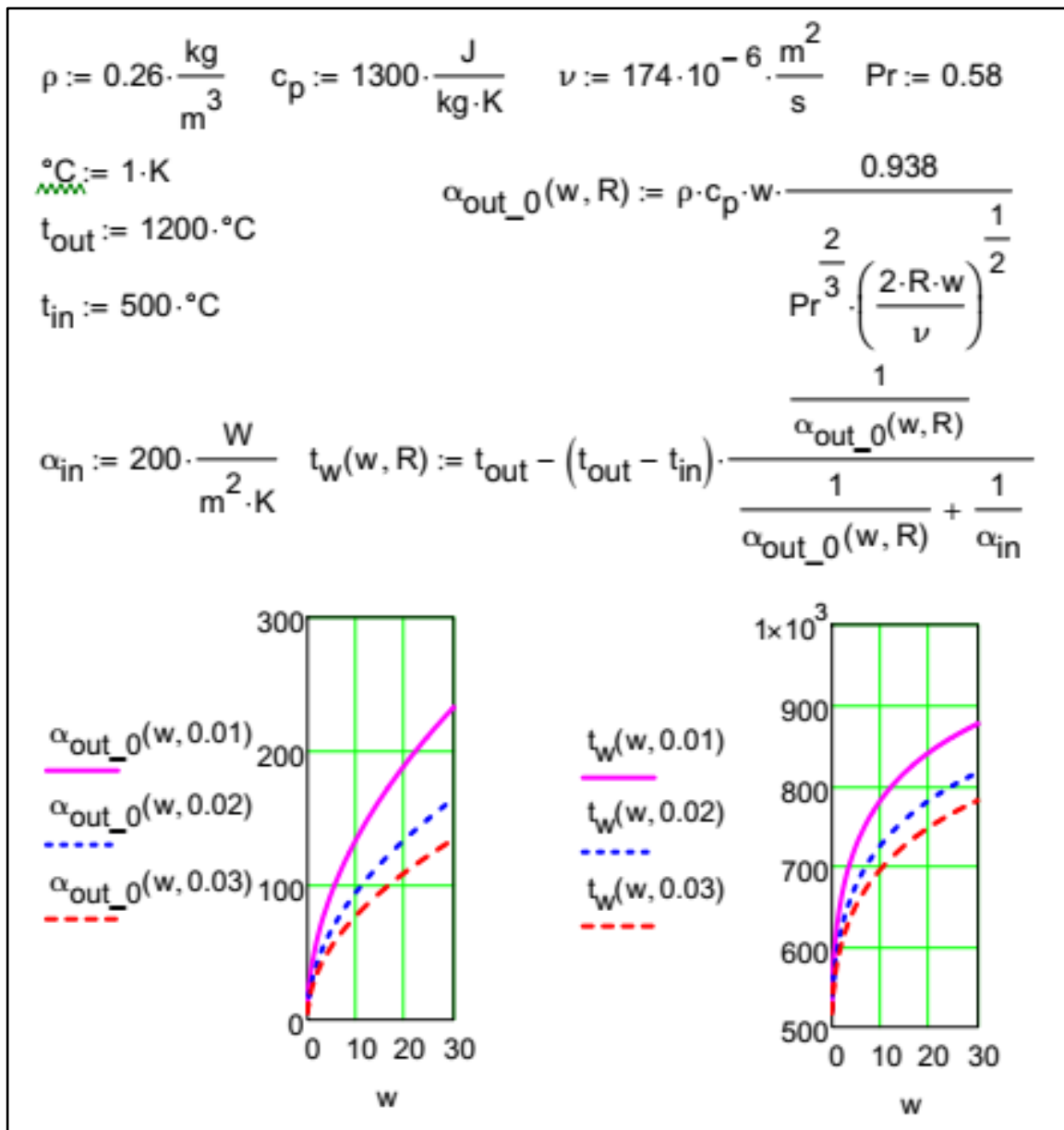


Рис. 2.7. Коефіцієнт тепловіддачі в критичній точці при різних значеннях швидкості набігаючого потоку і радіусу труби

2.6 Приведення математичного опису до безрозмірного виду

Ціль подальших обчислень є розподілення характерних величин по окружності труби. Прості операції масштабування змінних величин приводять до безрозмірного формулювання, що включає:

диференційне рівняння (ДР) для безрозмірної величини втрати ентальпії H пограничного шару (рівняння (2.6) в розмірному виді):

$$\frac{d}{dx} H(X) = Q(X, Y) \quad H(0) = 0; \quad (2.12)$$

систему алгебраїчних рівнянь (САР), що встановлює в неявній, алгоритмічній формі функціональну залежність $Q(X, Y)$ для правої частини диференційного рівняння, яке складається:

- 1) з виразу для втрати ентальпії через задане розподілення швидкості U_{inf} зовнішнього потоку і невідомі (шукані) значення товщини теплового пограничного шару D і температурного напору T :

$$H = U_{inf}(X)DT; \quad (2.13)$$

- 2) рівняння теплопередачі (рівняння (2.4) в розмірному виді), що включає заданий числовий параметр R_α :

$$Q = \frac{1}{D + R_\alpha}; \quad (2.14)$$

- 3) рівняння теплопередачі (рівняння (2.5) в розмірному виді) на зовнішній стороні:

$$Q = T/D \quad (2.15)$$

Безрозмірні залежні змінні визначаються через співвідношення розмірних величин наступними співвідношеннями.

- 1) Безрозмірний температурний напор «зовнішній теплоносій – стінка»:

$$T = \frac{t_{out} - t_w(x)}{t_{out} - t_{in}} \quad (2.16)$$

- 2) Безрозмірна щільність теплового потоку:

$$Q = \frac{q(x)}{\rho c_p W (t_{out} - t_{in})} \frac{1}{St_{W0}} \quad (2.17)$$

- 3) Безрозмірна (відносна) товщина теплового пограничного шару:

$$D = \frac{\delta_{txx}(x)}{\delta_{txx}(0)} = \left(\frac{\alpha_{out}(x)}{\alpha_{out}(0)} \right)^{-} \quad (2.18)$$

Безрозмірні задані параметри і функції:

- 1) Функція, що задає розподілення швидкості зовнішнього потоку по окружності труби

$$U_{inf}(x) = \frac{u_{inf}(x)}{2W} \quad (2.19)$$

- 2) Безрозмірний параметр задачі, рівний відношенню коефіцієнтів тепловіддачі з зовнішньої і внутрішньої сторони труби:

$$\frac{\alpha_{out}(0)}{\alpha_{in}} = R_{\alpha} \quad (2.20)$$

Величина R_{α} , рівна відношенню характерних значень коефіцієнтів тепловіддачі з зовнішньої та внутрішньої сторони труби, є єдиним числовим параметром задачі в безрозмірному формулюванні. З збільшенням параметра R_{α} температура поверхні труби наближається до температури зовнішнього (гарячого) теплоносія і може перевищити допустиму межу.

2.7. Представлення правої частини диференційного рівняння у формі алгоритму оптимізації

Для чисельного інтегрування ДР можна звернутися до будь якої вбудованої функції MathCad, наприклад, **rkfixed**, **rkadapt**, **Odesolve**. Однак попередньо необхідно розробити функцію користувача $Q(X, H)$ для обчислення правої частини ДР (2.12) через поточне значення незалежної змінної (координати X) і шуканої змінної (втрати ентальпії H). Відповідний програмний блок, записаний на вбудованій мові програмування MathCad, представлена на рис. 2.8. Розв'язок нелінійної системи рівнянь САР [(2.13)-(2.15)], здійснюється як пошук **мінімуму** функції користувача F .

Математична задача оптимізації вирішується за допомогою вбудованої функції **Minimize**.

Функція F сконструйована таким чином, що вона:

- 1) Перетворюється на нуль, якщо змінні Q , T , D при деяких заданих значеннях X , H , R_{α} задовольняють попередньо отриманій системі рівнянь САР [(2.13)-(2.15)];
- 2) Набуває все більших позитивних значень по мірі віддалення змінних від розв'язку цієї системи.

Функція користувача **Mini(*)** з повним списком параметрів звертається до вбудованої функції **Minimize**:

$$\mathbf{Mini}(Q, T, D, X, H, R_{\alpha}) := \mathbf{Minimize}(F, Q, T, D).$$

$$\begin{aligned}
 U_{\text{inf}}(X) &\equiv \text{if}\left(X < \frac{\pi}{4}, \sin(X), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
 F(Q, T, D, X, H, R_{\alpha}) &\equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{eq1} \leftarrow H - U_{\text{inf}}(X) \cdot D \cdot T \\ \text{eq2} \leftarrow Q - \frac{T}{D} \\ \text{eq3} \leftarrow Q - \frac{1}{(D + R_{\alpha})} \\ \text{eq1}^2 + \text{eq2}^2 + \text{eq3}^2 \end{array} \right. \\
 \text{Mini}(Q, T, D, X, H, R_{\alpha}) &:= \text{Minimize}(F, Q, T, D) \\
 \text{RH}(X, H) &:= \left\{ \begin{array}{l} D_0 \leftarrow 1 \\ Q_0 \leftarrow \frac{1}{D_0 + R_{\alpha}} \\ T_0 \leftarrow Q_0 \cdot D_0 \\ \text{Mini}(Q_0, T_0, D_0, X, H, R_{\alpha}) \end{array} \right. \\
 Q(X, H) &:= \text{RH}(X, H)_0
 \end{aligned}$$

Рис. 2.8. Програмний блок для визначення правої частини диференційного рівняння (2.12)

Вектор-функція RH має наступні компоненти: тепловий потік Q, температурний напір T, товщина пограничного шару D. В якості початкового наближення задані значення в передній критичній точці.

Права частина (2.12) є компонента RH с нульовим індексом.

2.8. Чисельне інтегрування за допомогою вбудованої функції Odesolve

Після визначення правої частини можна викликати вбудовану функцію **Odesolve** для чисельного інтегрування (2.12) і представити результати в наочній графічній формі, як показано на рис. 2.9.

На останньому етапі, використовуючи отримані розв'язки для втрати ентальпії H, будують розподіл по окружності труби безрозмірних значень коефіцієнту тепловіддачі на зовнішній стороні, щільності теплового потоку, температурного напору «зовнішній потік – стінка», як це зроблено на рис. 2.10.

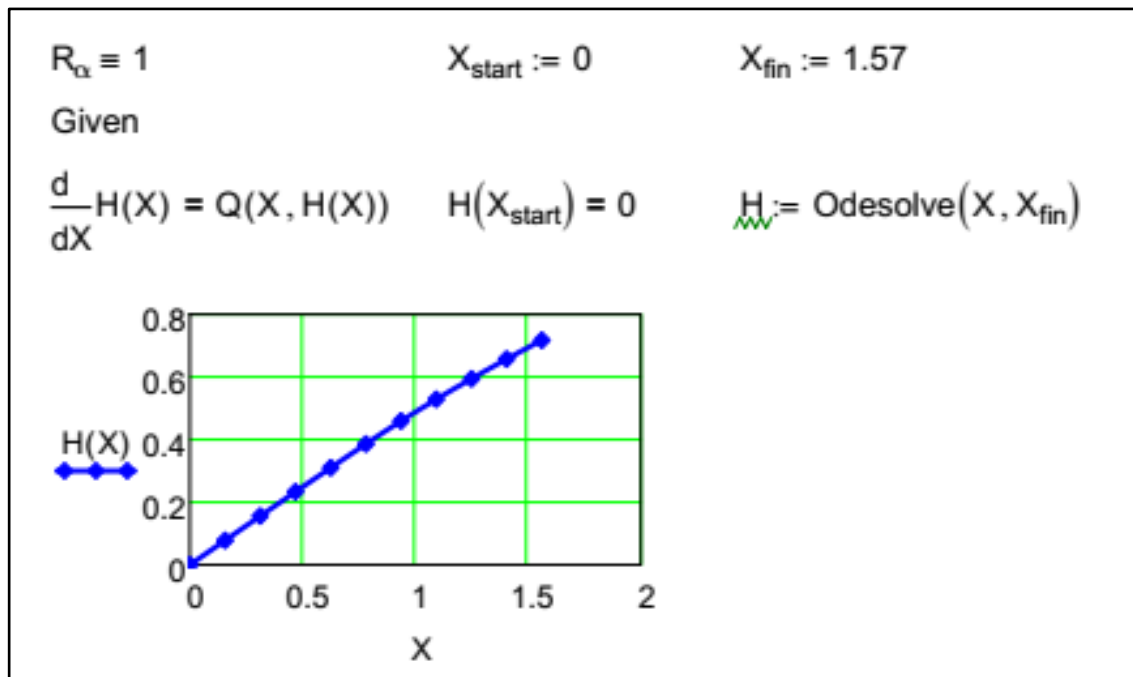


Рис. 2.9. Чисельне інтегрування рівняння пограничного шару

Індекс «rel» в позначеннях на рис. 2.10 вказує на те, що величини віднесені до відповідних масштабів і є безрозмірними. Величина безрозмірної щільності теплового потоку $q_{\text{rel}}(X)$ (або Q) пов'язана з відповідним розмірним значенням $q(x)$, Вт/м², формулою (2.17).

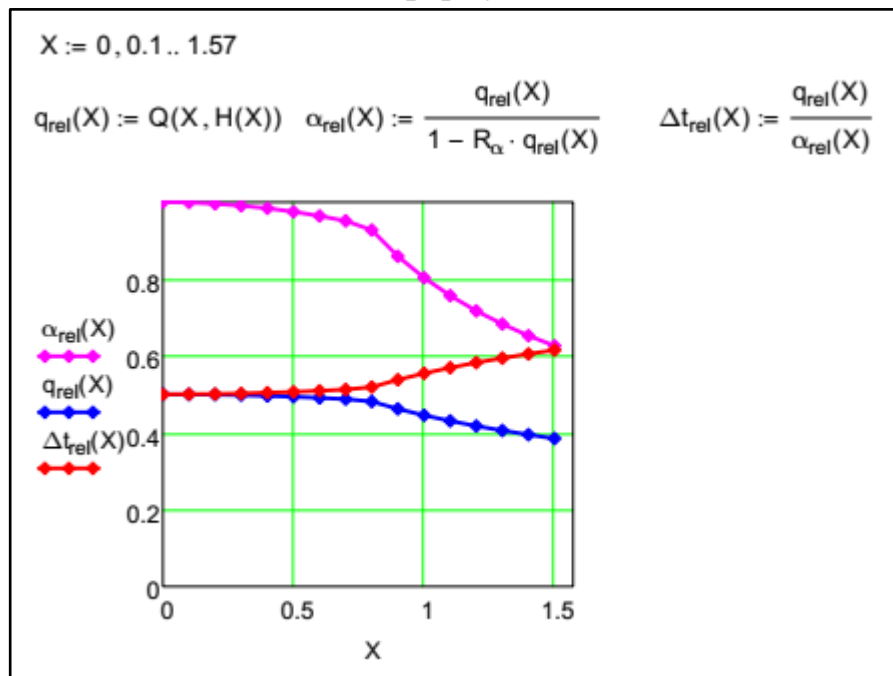


Рис. 2.10. Розподілення коефіцієнту тепловіддачі, теплового потоку і температурного напору по окружності труби

Безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі на зовнішній стороні віднесений до значення в критичній точці.

$$\alpha_{rel}(X) = \frac{\alpha_{out}(x)}{\alpha_{out}(0)}.$$

У відповідності з (2.18) і (2.14):

$$\alpha_{rel} = \frac{1}{D} = \frac{1}{\frac{1}{Q} - R_{\alpha}} = \frac{Q}{1 - R_{\alpha}Q} = \frac{q_{rel}}{1 - R_{\alpha}q_{rel}}.$$

Безрозмірний температурний напір між зовнішнім потоком і стінкою згідно (2.16):

$$\Delta t_{rel} = T = \frac{t_{out} - t_w(x)}{t_{out} - t_{in}}.$$

При побудові графіка ця величина обчислювалась через вже розраховані значення теплового потоку і коефіцієнту тепловіддачі за допомогою формули (2.15):

$$T = QD = \frac{Q}{\alpha_{rel}} = \frac{q_{rel}}{\alpha_{rel}}.$$

Як видно з підсумкового графіку (рис. 2.10), найбільша інтенсивність тепловіддачі на навітряній стороні обтічної поверхні досягається в критичній точці. Тут же мінімальна різниця температур «гарячий зовнішній теплоносій – стінка труби», тобто температура стінки ближче всього до високої температури зовнішнього теплоносія і, відповідно, тут створюються найбільш небезпечні температурні умови для матеріалу труби.

2.9. Висновок

Розглянута задача пов'язана з проблемою надійності високотемпературної поверхні нагріву, якою є паропідігрівач на тепловій електростанції. Зазвичай обмежуються розрахунком середньої температури поверхні нагріву і порівнюють її з допустимою температурою для матеріалу труби. Такий розрахунок проводиться по елементарним формулам теплопередачі:

$$q = \frac{(t_{out}-t_{in})}{\frac{1}{\alpha_{out}}+\frac{1}{\alpha_{in}}}; \quad q = \frac{(t_{out}-t_w)}{\frac{1}{\alpha_{out}}},$$

в яких всі величини, у тому числі і шукана температура стінки t_w , вважаються середніми по окружності труби.

Однак більш правильним було б рахувати максимальну температуру стінки. Якщо розрахунковий запас по температурі був обраний невеликим, то можлива небезпечна ситуація, коли середня температура стінки буде нижче допустимої, а максимальна – перевищить це значення.

Дослідженню цієї проблеми і був присвячений даний проект. Необхідність розраховувати локальну температуру призвела до розробки

диференційної моделі і, як ми бачили, MathCad виявився ефективним інструментом вирішення цієї непрості задачі.

У обчислювальному аспекті центральним пунктом моделі було інтегрування звичайного диференційного рівняння. При наявності цілого набору вбудованих функцій чисельного інтегрування будь-яких математичних труднощів виникати не повинно. Проте початківець інженер-дослідник може опинитися в скрутному становищі перед наступною проблемою - в навчальних прикладах довідкових посібників праві частини диференційних рівнянь завжди представляються простими аналітичними виразами. В реальних задачах, що виникають в інженерній практиці або наукових дослідженнях, права частина диференційних рівнянь часто взагалі не може бути виражена якимось, нехай і складним, аналітичним виразом, а представляється у формі складного алгоритму, спеціального програмного модулю або цілої програми зі складною структурою.

Тому досить корисним є приклад використання структури MathCad (програмні модулі, вбудовані функції оптимізації тощо), які доцільно використати при вирішенні реальних задач з диференційними рівняннями. Права частина диференційного рівняння була реалізована у формі алгоритму оптимізації і було показано, як можна включити вбудовану функцію **Minimize** в програмний модуль на мові програмування MathCad.

3. ТЕРТЯ І ТЕПЛООБМІН В ПОГРАНИЧНОМУ ШАРІ

3.1. Рівняння Фолкнера-Скен

Рівняння Фолкнера-Скен [9]

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0 \quad (3.1)$$

При граничних умовах

$$\eta=0; f(0) = f_w; f'(0) = 0; \eta \rightarrow \infty; f'(\infty) \rightarrow 1 \quad (3.2)$$

Описують клас так званих автотельних (подібних) ламінарних течій в пограничному шарі на проникній поверхні (рис. 3.1) і при змінній швидкості (змінному тиску) у зовнішньому потоці.

Залежна змінна f є безрозмірною функцією потоку, незалежна змінна η - безрозмірна відстань від стінки. Повздовжня складова швидкості і дотичне напруження тертя визначаються як перша і друга похідна від f .

Розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) є фундаментом для аналізу опору і тепломасообміну

- При обтіканні криволінійних профілів, таких як лопатки газових турбін або крила літаків;
- При обтіканні проникних (перфорованих) стінок зі спеціально організованим вдуванням або відсмоктуванням;
- При конденсації або випаровуванні на міжфазових границях;
- При інтенсивних каталітичних реакціях на стінці.

Числовий параметр β в граничній умові на стінці задає величину поперечного потоку маси на поверхні. Позитивні значення відповідають течії з підсосом, негативні – течії з вдувом (рис. 3.1) через проникну поверхню. Нульове значення відповідає течії на непроникній поверхні.

Числовий параметр β (позитивний або негативний) в рівнянні Фолкнера – Скен задає ступінь прискорення або уповільнення зовнішнього потоку. Нижче будуть в основному розглянуті течії з нульовим значенням цього параметру, тобто течії, що не піддаються впливу сильного повздовжнього градієнту тиску.

Рівняння Фолкнера – Скен (3.1), спільно з аналогічним по структурі рівнянням (3.22) для теплового пограничного шару, утворює теоретичний фундамент конвективного тепломасообміну.

Обидва згаданих звичайних диференціальних рівняння (3.1) и (3.22) отримані з більш загальних рівнянь переносу імпульсу (рівняння нерозривності в двовірній постановці, рівняння руху в проекції на вісь x та рівняння руху в проекції на вісь y , відповідно):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

і енергії

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} + \rho c_p u \frac{\partial t}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial t}{\partial y} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

в часткових похідних на основі наступних двох фундаментальних ідей: про пограничний шар і про перетворення подібності.

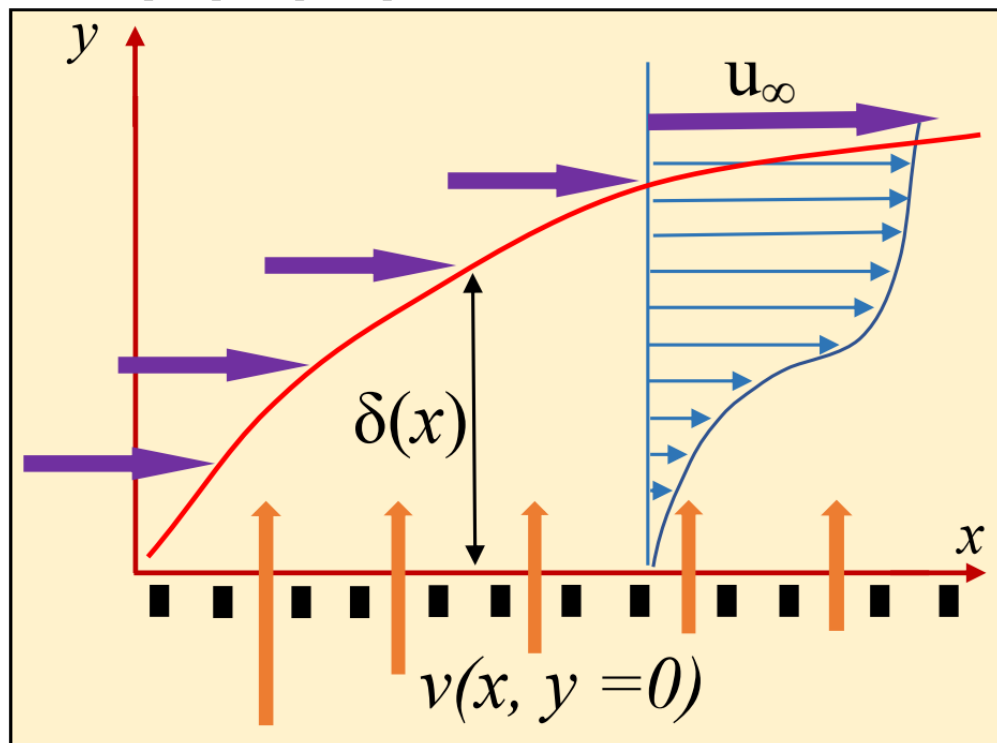


Рис. 3.1. Схема обтікання проникної поверхні

Пограничний шар. При обтіканні тіл малов'язкою рідиною ($\mu/\rho \equiv \nu \rightarrow 0$) зміни швидкості повинні бути зосереджені в межах тонкого пограничного шару рідини біля стінки, щоб сили в'язкості могли забезпечити необхідне гальмування (втрату імпульсу) зовнішнього потоку від u_∞ до нуля. Це твердження засновано на фізичному сенсі рівняння руху як рівняння збереження імпульсу. Більш конкретно його сенс розкривають оцінки порядку в рівняннях нерозривності і руху:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\underline{u}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{v}{\delta}} = 0; \Rightarrow v \approx \frac{\delta}{x} u_{\infty} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\rho_{\infty} \frac{u_{\infty}}{x}} + \underbrace{\rho v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\rho v \frac{u_{\infty}}{\delta}} &= - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\frac{\rho u_{\infty}^2}{x}} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\mu \frac{u_{\infty}}{x^2}} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\mu \frac{u_{\infty}}{\delta^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_{\infty} \frac{u_{\infty}}{x} &\approx \frac{u_{\infty}^2}{x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{u_{\infty}}{\delta^2} \Rightarrow \frac{\delta}{x} \approx \sqrt{\frac{1}{\frac{u_{\infty} x}{\nu}}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Зверніть увагу на те, що вважаючи в'язкість малою, $\mu/\rho \rightarrow 0$, ми не рахуємо її нульовою і зберігаємо в'язкі сили в рівнянні, щоб забезпечити умови прилипання на стінці. Різниця в порядку величин виникає тому, що товщина пограничного шару має бути малою, $\delta \rightarrow 0, \delta \ll x$, щоб забезпечити необхідну величину сили в'язкості при прямуванні коефіцієнту динамічної в'язкості до нуля, $\mu/\rho \rightarrow 0$.

Було б неприпустимо знехтувати силами в'язкості, оскільки при цьому в рівнянні руху зникнуть другі похідні по координатам, математичний порядок диференційного рівняння знизиться, і, внаслідок цього, від граничної умови прилипання доведеться відмовитись.

Як видно з останньої стадії перетворень в (3.4), нечітке висловлення про малов'язкі рідини може бути замінено суворішим формулюванням про течії в асимптотичному випадку більших чисел Рейнольдса, $Re_x \equiv u_{\infty} x / \nu \gg 1$.

З (3.3), (3.4) при цьому впливає асимптотичний перехід до більш простих рівнянь динамічного пограничного шару:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (3.5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.6)$$

В межах пограничного шару, $\delta/x \ll 1$ (див. рис. 3.1), повздовжня швидкість u швидко змінюється від u_{∞} до нуля на стінці, а поперечна складова v виявляється набагато меншою ніж повздовжня складова. Зміною тиску в поперечному перетині можна знехтувати; слід враховувати тільки його повздовжні зміни.

Аналогічні викладки можна провести з рівнянням енергії і отримати в результаті наступне диференціальне рівняння теплового пограничного шару:

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}; \alpha \equiv \frac{\lambda}{\rho c} \quad (3.7)$$

Це рівняння буде проінтегроване далі в наступному параграфі, що дозволить кількісно описати інтенсивність теплообміну при обтіканні

поверхні потоком теплоносія. Рівняння теплового шару в інтегральній формі було отримано і вирішено в розділі 2.

Перетворення подібності. Друга ідея дозволяє перейти від рівняння в часткових похідних до звичайних диференціальних рівнянь завдяки перетворенню подібності – такій заміні змінних, що дві незалежні змінні x і y комбінуються в єдину незалежну змінну $\eta = y/\delta(x)$, де $\delta(x)$ – товщина пограничного шару (див. рис. 3.1). Таким чином, змінна подібності η є відстанню від стінки, розрахована в масштабі товщини пограничного шару.

Якщо ввести далі в якості нової залежної змінної функцію течії, таку що

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

То рівняння нерозривності (3.5) автоматично задовольняється. Сенс нової змінної стає ясним із співвідношення

$$d\psi = u dy \text{ при } x = \text{const}, \quad \psi = \int_0^y u dy,$$

згідно якому функція течії визначає витрату рідини в межах пограничного шару. Масштабом для ψ може слугувати величина $u_\infty \delta$, приблизно рівна витраті в межах пограничного шару, товщина якого δ , як ми бачили раніше, оцінюється співвідношенням порядку: $\delta/x \approx 1/\sqrt{Re_x}$.

Тож, ідея полягає в тому, щоб перейти від змінних $u(x, y)$, $v(x, y)$ до автомодельних змінних $\psi/(u_\infty \delta)$, η . Ефективність такої заміни залежить не тільки від структури диференціальних рівнянь, але і від способу задання граничних умов.

В інженерній практиці зустрічаються задачі зі складними граничними умовами – з перемінною швидкістю зовнішнього потоку (рух в соплових апаратах, обтікання лопаток турбін тощо), з проникною поверхнею стінки (масообмін на стінці, фазові перетворення, вдув або відсмоктування). В деяких випадках (наприклад при степеневому законі зміни швидкості зовнішнього потоку, при зміні швидкості закону зміни швидкості зовнішнього потоку, при зміні швидкості відсмоктування такому як $1/\sqrt{x}$, при степеневому законі зміни надлишкової температури стінки в задачах теплообміну) вдається отримати автомодельні (подібні) рішення. Узагальнені змінні називаються в цьому випадку змінними Фолкнера – Скен, а математичне формулювання динамічної задачі записується у вигляді рівняння (3.1), (3.2). Наведемо коротке зведення позначень для автомодельних течій:

$$u_\infty = cx^m,$$

$$\text{Де } m \equiv -\frac{dP}{dx} x / (\rho u_\infty^2) - \text{модифікація числа Ейлера.}$$

Параметр β в рівняння Фолкнера – Скен пов'язаний з числом Ейлера відношенням

$$\beta = \frac{2m}{m+1}$$

Автомодельна змінна η і безрозмірна функція течії $f = \Psi/u_\infty \delta$) задаються відношеннями:

$$\eta = y \sqrt{\frac{1}{\nu \beta} \frac{du_\infty}{dx}}; f = \frac{\Psi}{u_\infty} \sqrt{\frac{1}{\nu \beta} \frac{du_\infty}{dx}}$$

Тож, завдяки асимптотиці пограничного шару і перетворенню подібності складне початкове формулювання з диференціальними рівняннями в часткових похідних вдалося звести до задачі зі звичайним диференціальним рівнянням (3.1), (3.2).

Однак навіть будучи результатом значних спрощень, рівняння Фолкнера – Скен залишається складним математичним об'єктом, внаслідок нелінійності і способу задання граничних умов [10].

Математичний пакет MathCad надає ефективні методи для вирішення таких непростих завдань.

Даний приклад – одна з важливих задач технічної фізики, і в цьому аспекті головним буде досягнення розуміння того, як формується потік в'язкої рідини в полі температур поблизу обтічної поверхні і як можна впливати на структуру течії за допомогою зовнішніх чинників таких, як вдув або відсмоктування.

З точки зору оволодіння технікою роботи в середовищі MathCad, головним буде чисельне вирішення крайової двохточкової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з застосуванням функції **sbval**, що дозволяє звести крайову проблему до задачі з початковими умовами. Інфраструктура проекту включає інтегрування методами **rkfixed** і **odesolve**, обчислення кореня **root**, інтерполяцію **cspline**, **interp**, операції з матрицями **stack**, **matrix** тощо.

3.2 Математичне формулювання

Оскільки основний інтерес представляє профіль швидкості і тертя, тобто перша і друга похідні від розв'язку f , доцільно представити диференціальне рівняння третього порядку (3.1) у вигляді системи трьох диференціальних рівнянь першого порядку. Шукаючи функцію, її першу і другу похідну будемо розглядати як компоненти вектор – функції (F_0, F_1, F_2) . Виконавши наступні заміни:

$$\frac{d}{d\eta} f = \frac{d}{d\eta} F_0 = F_1; \quad \frac{d^2}{d\eta^2} f = \frac{d}{d\eta} F_1 = F_2; \quad \frac{d^3}{d\eta^3} f = \frac{d}{d\eta} F_2; \quad f = F_0.$$

Отримаємо систему рівнянь в векторному записі:

$$\frac{d}{d\eta} F = D(\eta, F) \quad (3.8)$$

Де залежна змінна і права частина визначені як вектор-функції:

$$F = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}; D(\eta, F) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ -F_0 F_2 - \beta[1 - (F_1)^2] \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Оскільки отримана система диференціальних рівнянь нелінійна (містить квадратичні члени $F_0 F_2$ і F_1^2), знадобиться чисельна процедура інтегрування.

Граничні умови (3.2) слід переписати в нових позначеннях наступним чином:

$$F_0(0) = f_w; F_1(0) = 0; F_1(\infty) = 1 \quad (3.10)$$

Перша з цих умов вказує значення безрозмірної функції течії на стінці (при $\eta=0$). Це варійований параметр, за допомогою якого задається інтенсивність вдуву або підсмоктування.

Друга умова задає нульове значення повздовжньої складової швидкості на стінці (при $\eta=0$), що відповідає фундаментальній умові прилипання.

Третя умова визначає повздовжню швидкість на нескінченності як швидкість набігаючого потоку. При числовому інтегруванні ця умова встановлюється на деякому достатньо великому, але скінченному значенні координати η , $\eta = \eta_{\text{inf}}$, такому, що при подальшому його збільшенні ніяких помітних змін профілю швидкості не помічається. Цього легко досягти при декількох пробних чисельних експериментах (або навіть так формалізувати вибір η_{inf} , щоб обчислювальна програма сама визначала потрібне значення зовнішньої межі η_{inf} виходячи із заданої точності розрахунків).

Метою подальших розрахунків буде побудова поля течії поблизу проникної стінки при різноманітних значеннях параметра f_w - негативних, що відповідають вдуву (або випаровуванню), і позитивних, як при відсмоктуванні (або конденсації).

Обмежимося далі дослідженням задачі з постійною швидкістю зовнішнього потоку (з нульовим повздовжнім градієнтом тиску) і приймемо відповідно нульове значення параметру β , ($\beta = 0$)

В результаті чисельного інтегрування системи (3.8) будуть отримані функції $F_0(\eta)$, $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$, після чого може бути розраховано поле потоку в початкових, фізичних координатах, а також визначено тертя на стінці. Зв'язок між фізичними змінними [тобто повздовжньою $u(x, y)$ і поперечною $v(x, y)$ складовими швидкості, функцією течії $\psi(x, y)$], з однієї сторони, і автотомельними змінними Фолкнера-Скен (тобто безрозмірною функцією течії $f(\eta)$ і безрозмірною відстанню від стінки η) – з другої, задають наступні рівняння:

$$U = \frac{u}{u_\infty} = \frac{d}{d\eta} f = F_1 \quad (3.11)$$

Для поперечної швидкості, віднесеної до швидкості зовнішнього потоку

$$V = \frac{v}{u_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2Re_L X}} \left(\eta \frac{d}{d\eta} f - f \right) = \frac{\eta F_1 - F_0}{\sqrt{2Re_L X}} \quad (3.12)$$

Рівняння (3.12), записане для нульового значення η , визначає зв'язок між значеннями функції течії і поперечної швидкості (швидкості вдуву або відсмоктування) безпосередньо на стінці:

$$\frac{v_w}{u_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2Re_L X}} (-f_w) = \frac{(-F_{0,w})}{\sqrt{2Re_L X}} \quad (3.13)$$

Друга похідна, обчислена безпосередньо на стінці, дає значення коефіцієнту тертя:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho(u_\infty)^2} = \frac{\mu \left(\frac{d}{dy} u \right)_w}{\rho(u_\infty)^2} = \frac{f''_w}{\sqrt{2Re_L X}} = \frac{F_{2,w}}{\sqrt{2Re_L X}} \quad (3.14)$$

Відмітимо, що відношення (3.12) і (3.13) дають підставу назвати величину f_w – параметром проникності, а величину f''_w – параметром тертя.

Автомодельна змінна, що інтерпретується як відношення відстані від стінки до товщини пограничного шару, обчислюється через фізичні координати по формулі:

$$\eta = \frac{Y}{\sqrt{2 \frac{X}{Re_L}}} \quad (3.15)$$

Безрозмірна функція течії f (або F_0) зв'язана зі звичайною функцією течії ψ рівнянням:

$$f = \frac{\psi}{u_\infty L} \sqrt{\frac{Re_L}{2X}} \quad (3.16)$$

Ці формули дублюють приведені в розділі 3.1 більш узагальнені відношення для розглянутого тут випадку постійної швидкості зовнішнього потоку.

Нагадаємо фізичний сенс функції течії, зрозумілий з визначального співвідношення

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_{y_1}^{y_2} u \, dy. \quad (3.17)$$

Де інтеграл береться при фіксованому значенні повздовжньої координати x , тобто по поперечному перетину потоку. Різниця значень на двох лініях течії рівна по об'ємній витраті.

Число Рейнольдса визначається по довжині обтічної поверхні L : $Re = u_\infty L / \nu$. Фізичні координати (x, y) зводяться до безрозмірного вигляду віднесенням до довжини: $X = x/L$, $Y = y/L$.

3.3. Зведення крайової задачі до початкової задачі методом sbval

Граничні умови для рівняння Фолкнера-Скен задані на кінцях області інтегрування - на стінці, при $\eta = 0$, і на відстані від неї, при $\eta \rightarrow \infty$ практично на деякій великій, але скінченній відстані $\eta = \eta_{\text{inf}}$.

Іншими словами, необхідно розв'язувати **крайову**, або, як іноді кажуть, **двоточкову**, задачу. Чисельні алгоритми для таких задач більш складні, ніж для початкових задач, коли всі граничні умови задані в початковій точці.

Стосовно початкових задач, обчислювальна математика має ефективний арсенал швидких і точних чисельних методів, серед яких найбільш поширені **методи Рунге-Кутти** з фіксованим або адаптованим кроком.

Можна використовувати цей арсенал при зведенні рішення крайової задачі до інтегрування серії початкових задач з пробними значеннями бракуючих початкових умов. Наскільки вдала або невдала кожна така спроба, можна визначити по «відстані» на якій опиниться обчислене значення від запропонованої граничною умовою на іншому кінці відрізка інтегрування. Тут можна побачити аналогію з пострілами з гармати по цілі, коли приціл коректують по відстані від розриву до поставленої цілі. Чисельний метод, заснований на цій аналогії, називають «**методом пристрілки**».

Обговоримо більш конкретно цю ідею стосовно нашої задачі. У початковій точці поставлені дві умови - задані значення для $F_0(0)$ і $F_1(0)$. Бракує значення для $F_2(0)$ в початковій точці, але задано $F_1(\eta_{\text{inf}})=1$ на кінці відрізка інтегрування. Розв'яжемо задачу з початковими даними, взявши в якості відсутньої умови для $F_2(0)$ деяке число ξ , просто наважання. В результаті на кінці відрізка матимемо розв'язок з деяким значенням F_1 , яке ми позначимо як $F_{1,\text{inf}}$. Мало ймовірно, що після інтегрування вийде правильне середнє арифметичне значення $F_{1,\text{inf}} = 1$, але можна вважати результат $F_{1,\text{inf}}$ функцією від пробного значення ξ . Тепер зрозуміло як діяти далі. Є два варіанти:

1. Розв'язувати рівняння $F_{1,\text{inf}}(\xi) - 1 = 0$ якимось чисельним методом, наприклад методом січних, розуміючи, що пробні значення функції $F_{1,\text{inf}}(\xi)$ знаходяться не просто підстановкою в якусь формулу, а за допомогою звернення до процедури чисельного інтегрування системи диференціальних рівнянь.

2. Прагнути мінімізувати нев'язку $(F_{1,\text{inf}}(\xi) - 1)^2 \rightarrow 0$, добиваючись нульового значення за допомогою будь-якого алгоритму оптимізації (мінімізації), наприклад методом покоординатного спуску, або симплексним методом Нелдера-Міда, або якимось іншим наявним методом.

В MathCad є спеціальна функція **sbval**, за допомогою якої можна визначити відсутні умови в початковій точці.

У довідковій системі MathCad назва функції **sbval** розшифровується наступним чином. Частина «**bval**» співвідноситься із словосполученням «*boundary value*», тобто «*граничне значення*». Буква «s» означає «*shooting method*», тобто метод стрільби, або пристрілки.

Як користувачам, нам достатньо цього загального уявлення, але ми повинні вміти написати звернення до зазначеної вбудованої функції (рис. 3.2). Відсутнє початкове значення буде повернене функцією **sbval**. Отриману початкову задачу вирішують чисельним методом (наприклад, методом Рунге-Кутта з фіксованим кроком **rkfixed**). Далі, скориставшись наведеними вище формулами (3.11) - (3.16) переходу до фізичних змінних і записаною далі програмою інтерполяції (див. рис. 3.4 - 3.5), будують векторне поле швидкості і функцію потоку, щоб зробити видимим вплив вдуву або відсмоктування на гідродинаміку потоку.

$$\begin{array}{l}
 \beta := 0 \qquad \eta_w := 0 \qquad \eta_{inf} := 6 \\
 D(\eta, F) := \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ -F_0 \cdot F_2 - \beta \cdot [1 - (F_1)^2] \end{bmatrix} \\
 f_w := 0 \qquad \xi_0 := 0.1 \qquad \text{SetInit}(\eta_w, \xi) := \begin{pmatrix} f_w \\ 0 \\ \xi_0 \end{pmatrix} \\
 \text{discrepancy}(\eta_w, F) := F_1 - 1 \\
 \text{MissingInitCond} := \text{sbval}(\xi, \eta_w, \eta_{inf}, D, \text{SetInit}, \text{discrepancy}) \\
 \text{MissingInitCond} = (0.4696)
 \end{array}$$

Рис. 3.2 Застосування функції **sbval**, що повертає відсутні умови в початковій точці ($F_2(0) = 0,4696$ для непроникної стінки)

Набір чисельних параметрів для розв'язку рівняння Фолкнера-Скен буде наступним:

- чисельний параметр, що визначає прискорення зовнішнього потоку: $\beta=0$;
- чисельний параметр, що задає вдув ($f_w < 0$) або відсмоктування ($f_w > 0$): $f_w=0$ (це випадок непроникнутої стінки);
- фіксоване нульове значення координати на обтічній стінці: $\eta_w = 0$;
- чисельний параметр, що задає зовнішню границю пограничного шару: $\eta_{inf} = 6$.

Звернення до вбудованої функції **sbval** показано на рис. 3.2. Послідовність дій така. Вводяться значення параметрів, записується права частина (3.9) системи диференціальних рівнянь (3.8). Функція користувача **Setlnit** формує вектор початкових умов відповідно до (3.10). Пробне значення другої похідної при $\eta=0$ вказується як компонент вектора з нульовим індексом ξ_0 (в інших задачах відсутніх початкових умов може бути більше, ніж одна, тому ξ має бути вектором). Функція користувача **discrepancy** формує нев'язку на кінці відрізка інтегрування $[(F_1 - 1)$ має дорівнювати нулю, див. (3.10)]. Далі записується звернення до функції **sbval**, а результат, тобто відсутня початкова умова, поміщається в вектор **MissinglnitCond**. Нагадаємо, що ця відсутня умова є значенням другої похідної на стінці, тобто $F_2(0)$.

3.4. Розв'язок початкової задачі методом rkfixed

Оскільки тепер відомі всі початкові умови, можна звернутися до будь-якої вбудованої функції чисельного інтегрування, наприклад **rkfixed** (рис. 3.3). Параметрами цієї функції є вектор початкових умов **InitCond**, координати початкової і кінцевої точок, число кроків інтегрування N і вектор-функція правої частини системи диференціальних рівнянь. Зауважимо, що фрагмент обчислень на рис. 3.3 є продовженням документа MathCad на рис. 6.2, де вже була представлена права частина D.

Результат інтегрування повертається як масив S , складовими якого є вектори незалежної змінної, безрозмірних функцій потоку, поздовжньої складової швидкості і напруження тертя. Для наочності, профіль поздовжньої швидкості побудовано таким чином, що обтічну стінку слід ототожнити з горизонтальною віссю координат, а потік вважати рухомим зліва направо. По вертикальній осі відкладені значення безрозмірної відстані від стінки η . Значення поздовжньої швидкості відраховуються по горизонтальній осі. Насправді побудовано графік типу **Vector Field Plot** (векторне поле), але

горизонтальні стрілки поздовжньої складової швидкості розміщено так часто, що вони зливаються, утворюючи епюру швидкості. Останні три рядки перед діаграмою на рис. 3.3 за допомогою функцій **stack** і **matrix** створюють необхідні масиви даних для побудови.

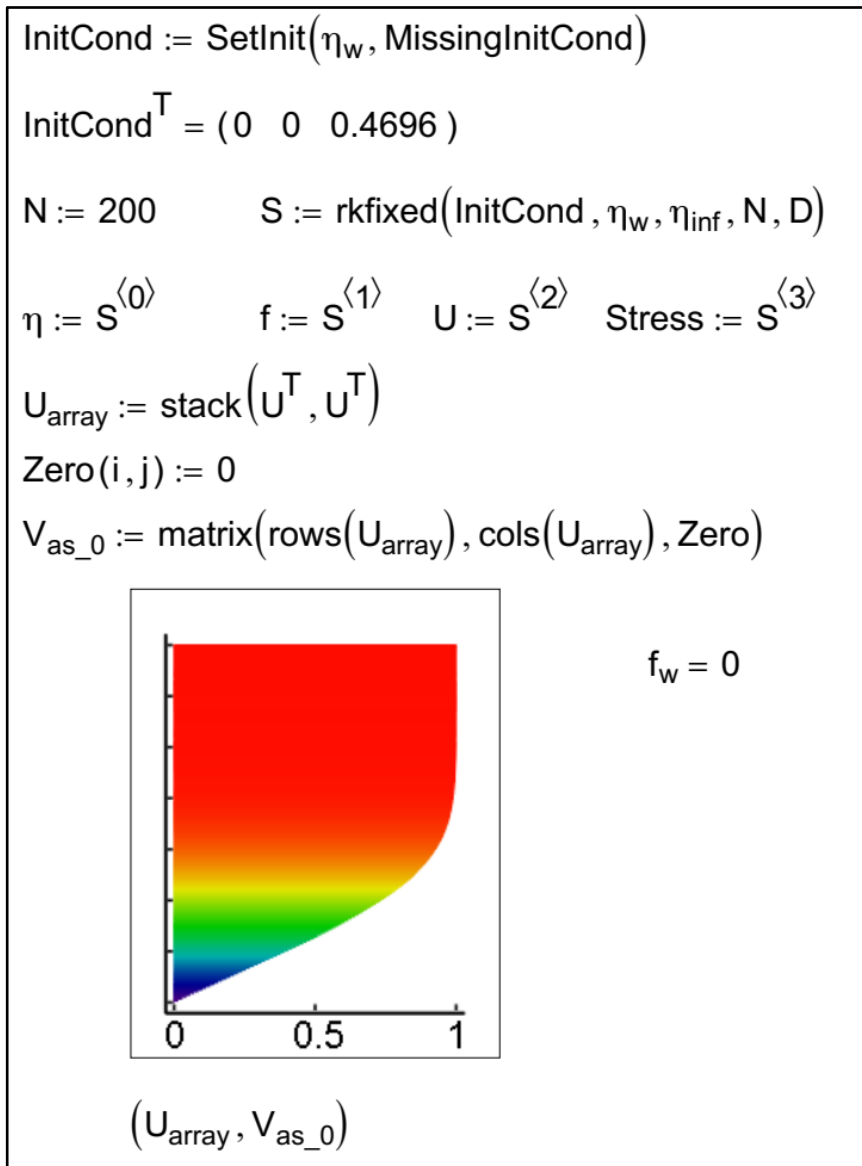


Рис. 3.3 Розподіл поздовжньої швидкості в граничному шарі на непроникній поверхні

Отже, на рис. 3.3 представлено класичний профіль швидкості в пограничному шарі на непроникній стінці. Далі буде наведено розрахунки для проникної поверхні, і ми побачимо, як вдув або відсмоктування впливають на профіль швидкості в пограничному шарі. Але попередньо представимо результати ще в двох формах (див. рис. 3.5). По-перше, побудуємо наочну картину розвитку векторного поля потоку вздовж обтічної поверхні, по-друге, побудуємо лінії потоку.

3.5. Побудова поля потоку

Для побудови поля потоку в початкових, фізичних координатах необхідно заповнити область течії квадратною координатною сіткою (x, y), для кожного вузла сітки обчислити за формулою (3.15) значення автомодельної змінної, а потім за формулами (3.11), (3.12) і (3.16) знайти значення поздовжньої U і поперечної V проекцій вектора швидкості, а також функції потоку ψ . Ці обчислення реалізовані в MathCad - програмі, ядро якої складають операції інтерполяції за допомогою функції **linterp** (рис. 3.4).

$$\begin{aligned}
 & \max(S^{(0)}) = 6 \\
 & \text{Fields}(S, Re_L, X_{\min}) \equiv \left(\begin{array}{l} X_{\max} \leftarrow 1 \quad nX \leftarrow 10 \quad nY \leftarrow 40 \\ \left(Y_{\max} \leftarrow \max(S^{(0)}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Re_L}} \quad Y_{\min} \leftarrow 0 \right) \\ \text{for } i \in 0..nX - 1 \\ \quad X_i \leftarrow X_{\min} + i \cdot \frac{X_{\max} - X_{\min}}{nX - 1} \\ \quad \text{for } j \in 0..nY - 1 \\ \quad \quad Y_j \leftarrow Y_{\min} + j \cdot \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{nY - 1} \\ \quad \quad \eta_{i,j} \leftarrow Y_j \sqrt{\frac{Re_L}{2 \cdot X_i}} \\ \quad \quad U_{i,j} \leftarrow \text{linterp}(S^{(0)}, S^{(2)}, \eta_{i,j}) \\ \quad \quad f_{i,j} \leftarrow \text{linterp}(S^{(0)}, S^{(1)}, \eta_{i,j}) \\ \quad \quad V_{i,j} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2 \cdot Re_L \cdot X_i}} \cdot (U_{i,j} \cdot \eta_{i,j} - f_{i,j}) \\ \quad \quad \Psi_{i,j} \leftarrow f_{i,j} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot X_i}{Re_L}} \\ \quad (U \quad V \quad \Psi \quad Y_{\max}) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Рис. 3.4 Програма інтерполяції для розрахунку поля потоку в фізичних координатах

Результати розрахунків представлені на рис. 3.5. Оскільки на передній кромці обтічної пластини (при $x = 0$) рішення має особливість, побудова починається з деякого малого скінченного значення X_{\min} .

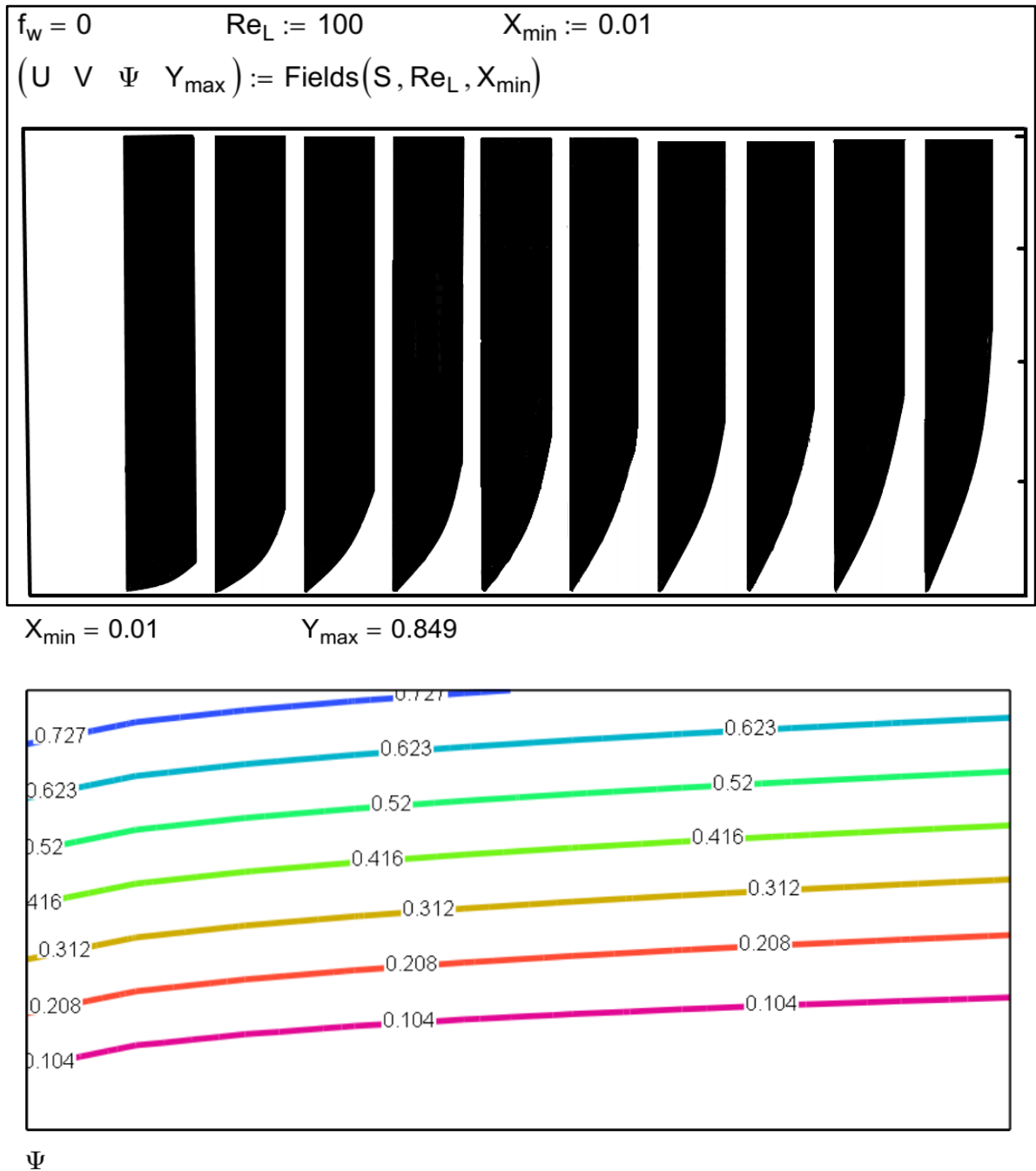


Рис. 3.5 Векторне поле течії і функція потоку для непроникної стінки

Двомірні масиви проєкцій швидкості U , V визначені на рівномірній сітці, і для побудови векторного поля потоку застосовується діаграма виду **Vector Field Plot** (верхній рисунок). Функція потоку ψ також обчислена як двомірний масив над тією ж рівномірною сіткою. Постійні значення ψ відповідають лініям потоку, і для їх побудови застосовано діаграму типу **Contour Plot** (нижній рисунок).

На верхньому рисунку видно, як поступово по ходу потоку потовщується пограничний шар, в межах якого відбувається вся зміна швидкості - від нуля на стінці до швидкості набігаючого потоку. Лінії потоку (нижній рисунок) йдуть майже паралельно обтічній поверхні, хоча помітно їх деяке відхилення вгору по ходу потоку внаслідок пригальмовування, «налипання» рідини на твердій стінці. І поздовжня, і поперечна складові швидкості перетворюються на нуль на твердій непроникній поверхні. Напруження тертя, пропорційне похідній $(\partial u / \partial y)$, досягає максимального значення на стінці і наближається до нуля на зовнішній поверхні пограничного шару.

Відповідно до рівняння (3.14), в якому слід зробити заміну (див. значення змінної **MissinglnitCond** на рис. 3.2) $f_w'' \equiv F_2(0) = 0,4696$, коефіцієнт опору на непроникній пластині виражається формулою

$$\frac{c_f}{2} = \frac{0.4696}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{u_{\infty} x}{\nu}}} = \frac{0.332}{\sqrt{\frac{u_{\infty} x}{\nu}}} \quad (3.18)$$

3.6. Пограничний шар на проникній поверхні

При вдуванні через проникну стінку (рис. 3.6 - 3.8) спостерігається різка зміна структури потоку в пограничному шарі. Профіль швидкості (рис. 3.6) набуває характерну S-подібну форму. Шар зсуву, в якому відбувається різка зміна швидкості і де дотичні напруження тертя відмінні від нуля (тобто власне пограничний шар), виявляється відтисненим від обтічної поверхні. На самій стінці напруження тертя зменшується і гранично, при так званому критичному вдуві, наближається до нуля.

Значення параметра проникності $f_w = -0,7$, прийняте в розрахунку близьким до критичного, а значення коефіцієнта тертя практично нульове ($[f_w'' \equiv F_2(0) = 0,05458$ (див. рис. 6.6)], порівняти зі значенням $f_w'' \equiv F_2(0) = 0,4696$ для непроникної стінки).

Щоб зробити структуру потоку поблизу стінки більш чіткою, на рис. 3.8 показано векторне поле швидкості в збільшеному масштабі. Слід зазначити, що поздовжня складова на самій стінці, як і раніше, дорівнює нулю, тобто виконується умова прилипання. Однак, поперечна складова, на відміну від непроникної поверхні, відмінна від нуля. Тому на самій стінці вектор швидкості ненульовий і спрямований по нормалі до поверхні.

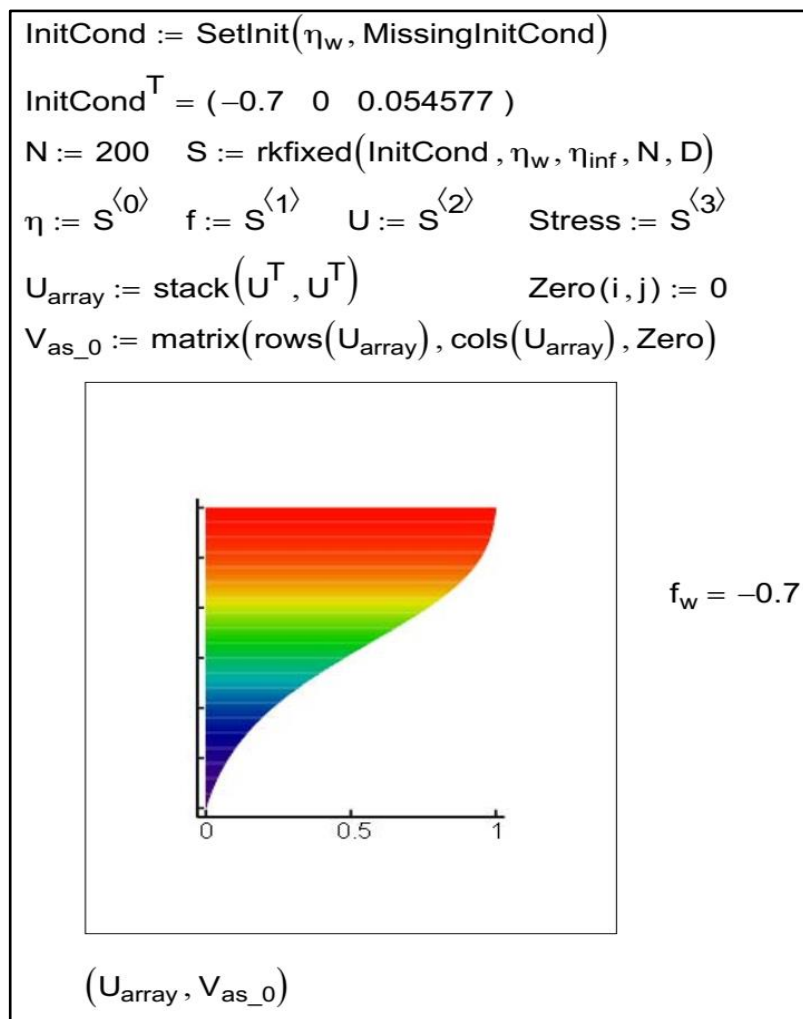
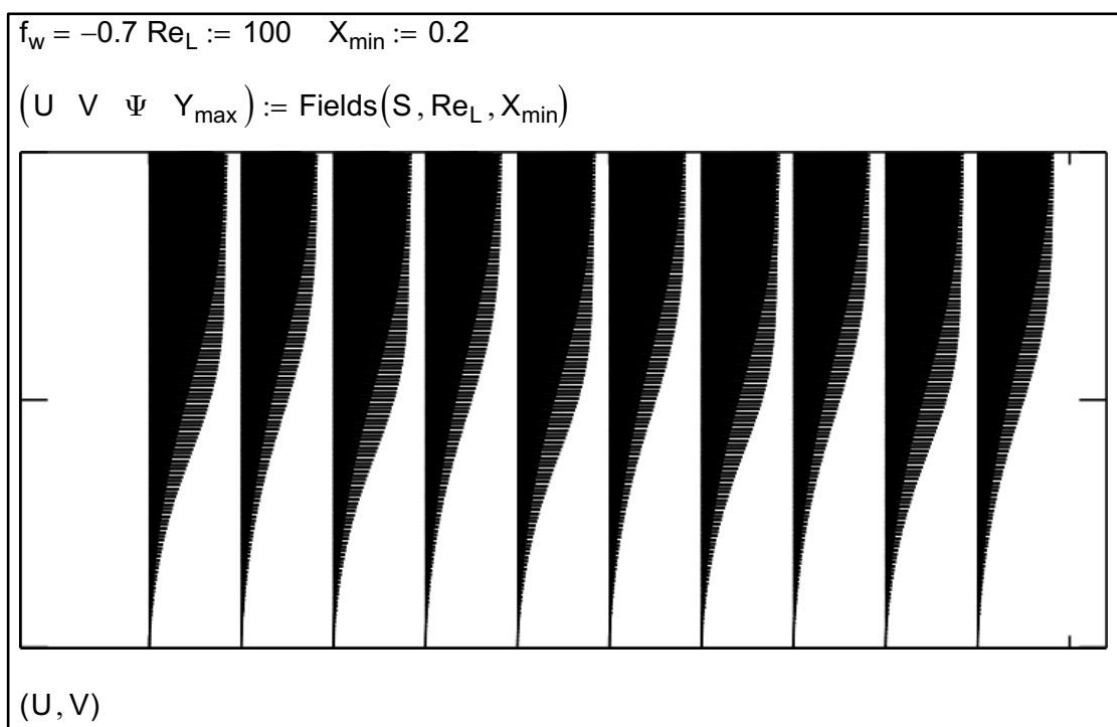
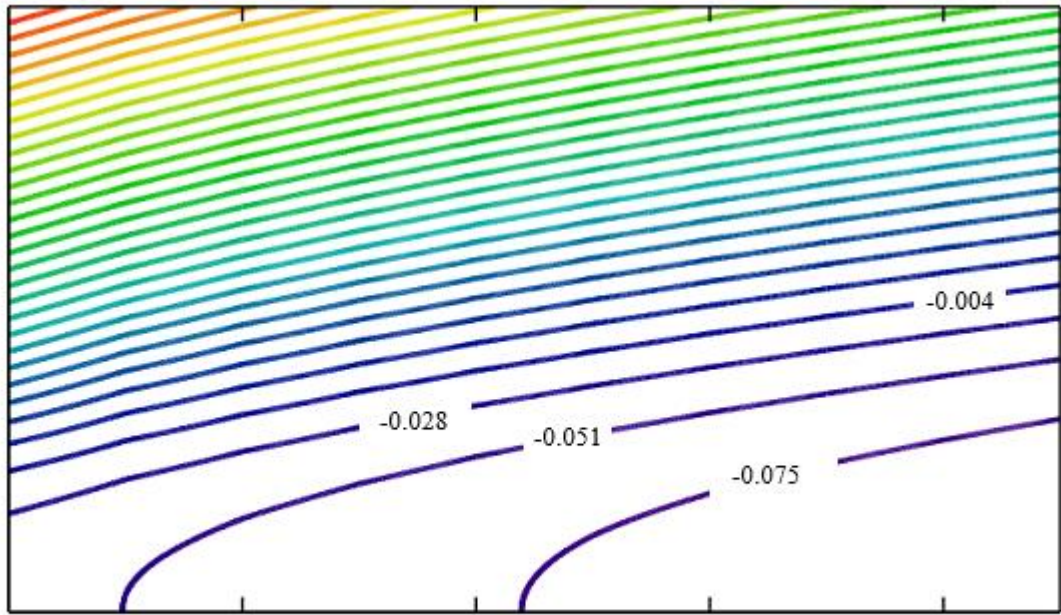


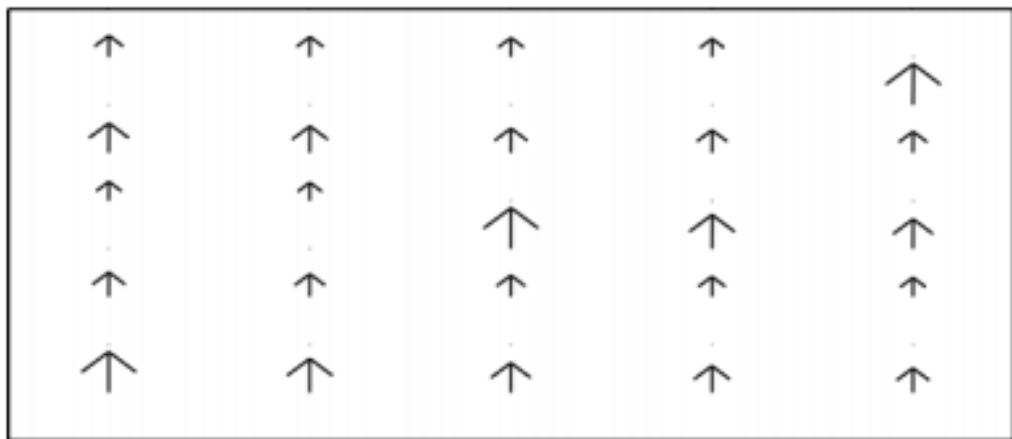
Рис. 3.6 Розподіл поздовжньої швидкості в пограничному шарі при вдуві
 $f_w = -0,7, f_w'' \equiv F_2(0) = 0,05458$





Ψ

Рис. 3.7 Векторне поле швидкості і функція потоку при вдуві



(U, V)

Рис. 3.8 Векторне поле швидкості поблизу стінки при вдуві

Потік в пограничному шарі з відсмоктуванням показано на рис. 3.9 - 3.11. Тут помітно істотні відмінності від випадку з непроникною стінкою. Тепер пограничний шар притискається до стінки, його товщина помітно менша, ніж для непроникної поверхні і, тим паче, для випадку зі вдувом.

Завдяки більшій крутизні профілю швидкості, значно зростає тертя на проникній поверхні в випадку відсмоктування. Друга похідна на стінці, пропорційна тертю, приймає значення $f_w'' \equiv F_2(0) = 7$ (при $f_w = 7$). Це значна величина, якщо порівняти зі значенням $f_w'' \equiv F_2(0) = 0,4696$ для непроникної стінки.

На рис. 3.11 показано векторне поле швидкості в збільшеному масштабі для випадку потоку з відсмоктуванням. Як завжди, завдяки умові прилипання поздовжня складова на самій стінці дорівнює нулю.

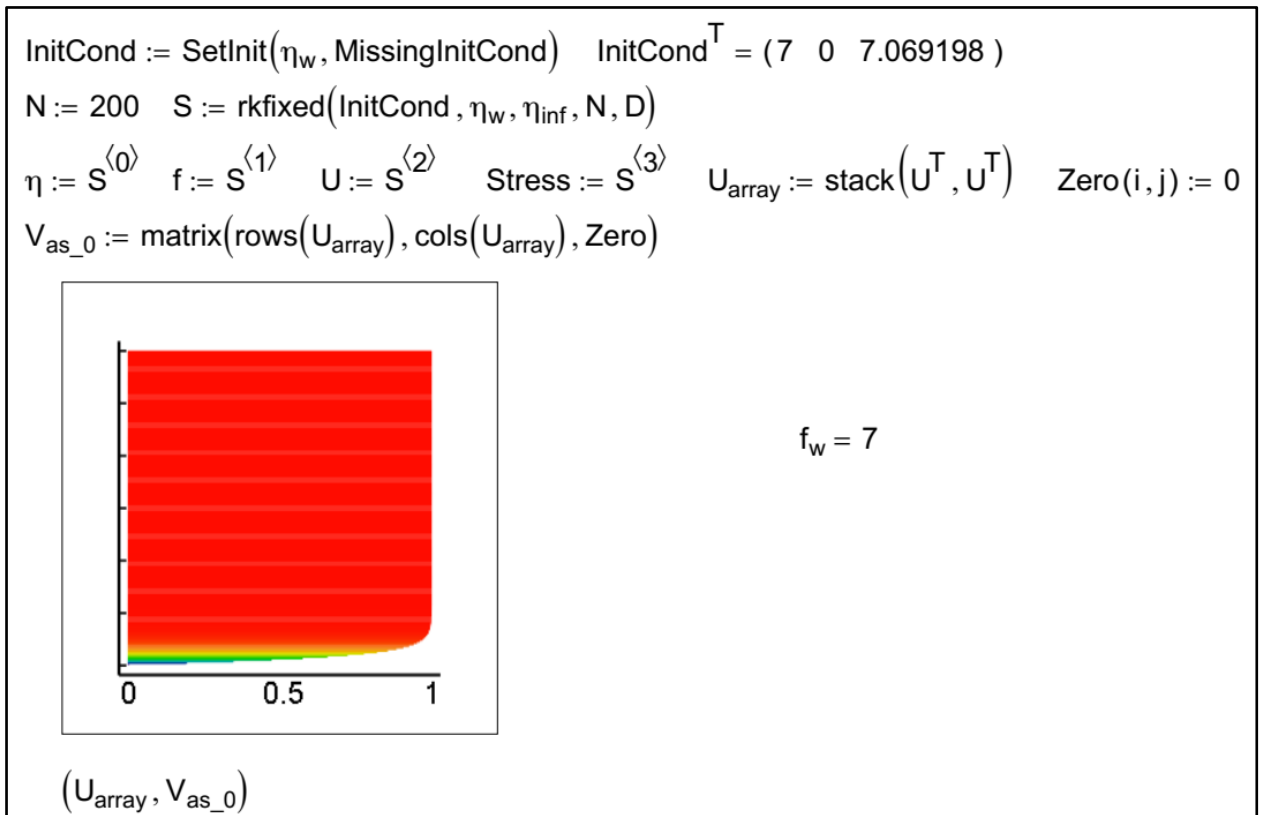
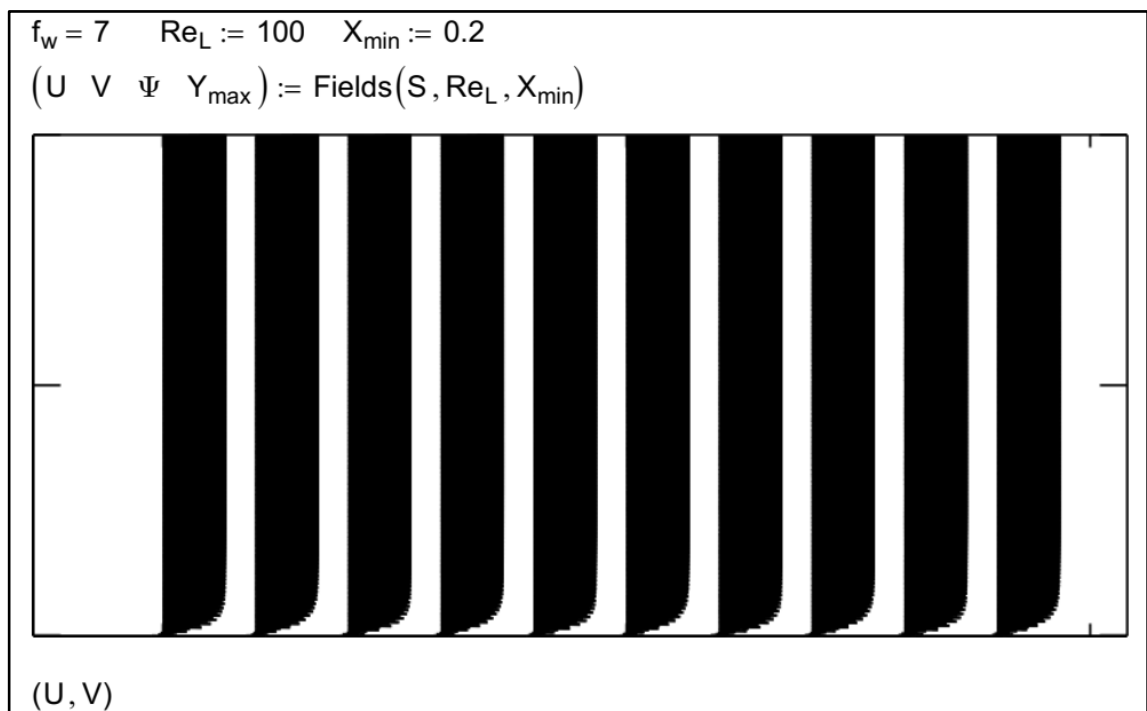


Рис. 3.9 – Розподіл поздовжньої швидкості в пограничному шарі з відсмоктуванням $f_w = 7, f_w'' \equiv F_2(0) = 7,0692$



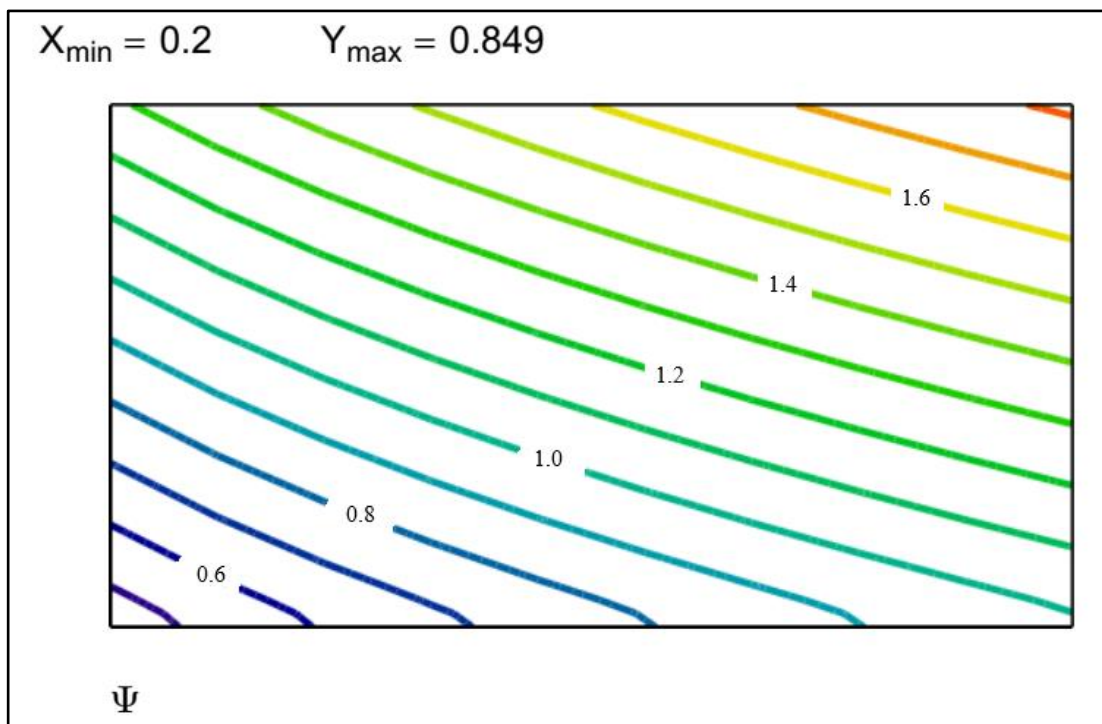


Рис. 3.10 Поле швидкості і функція потоку при сильному відсмоктуванні

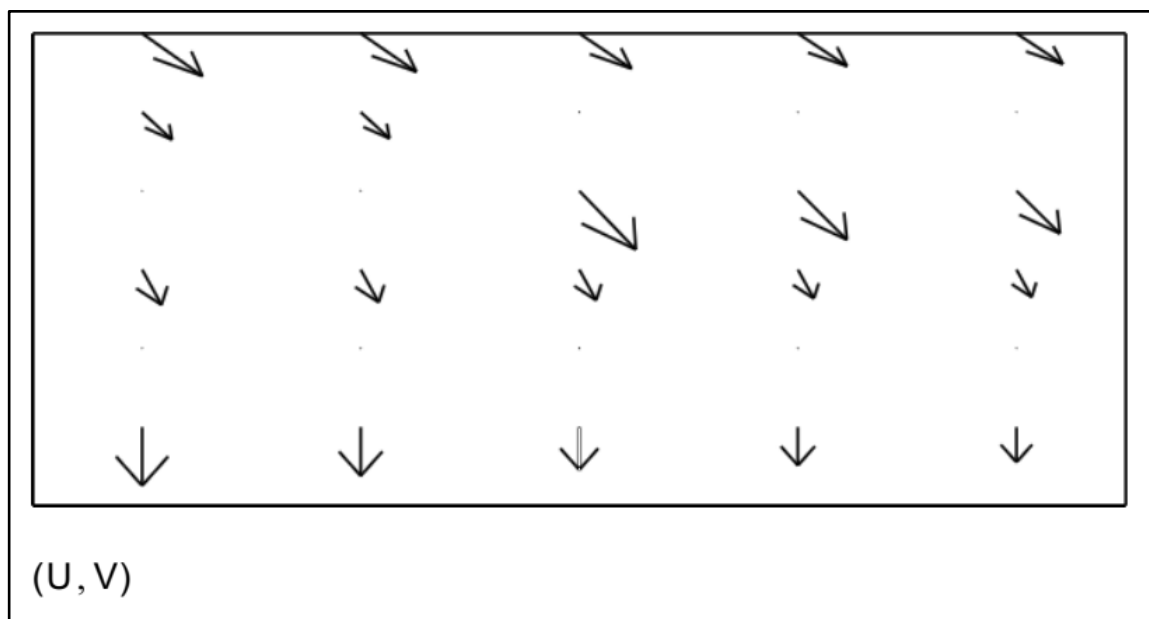


Рис. 3.11 Поле швидкості поблизу стінки при сильному відсмоктуванні

Поперечна складова, на відміну від непроникної поверхні, ненульова і приймає від'ємні значення.

У розрахунках, проведених вище для обтікання непроникної поверхні і для випадків із вдувом і відсмоктуванням через стінку, варійованим параметром було значення функції потоку на стінці f_w , яке ми називали параметром проникності [див. рівняння (3.13)]. При численному інтегруванні

крайової задачі кожен раз для заданого параметра отримуємо відповідне значення другої похідної на стінці яке є мірою тертя рівняння (3.14). Результати таких обчислень представлені графічно на рис. 3.12 в формі залежності $f_w''(f_w)$.

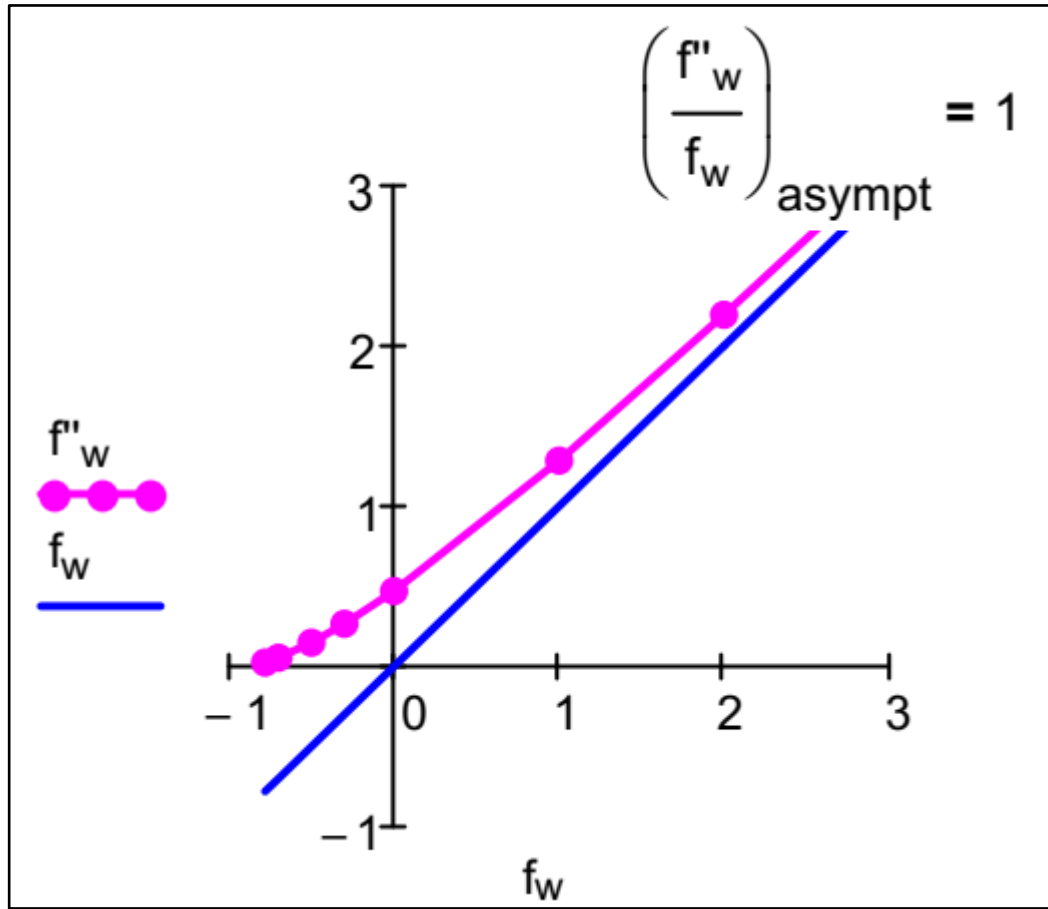


Рис. 3.12 Залежність параметра тертя від поперечного потоку

Як видно з графіка, для великих додатних значень параметра проникності, тобто для сильного відсмоктування, виявляється наступна асимптотика: $f_w'' \Rightarrow f_w$.

З рівнянь (3.13) і (3.14) випливає, що в зазначеній асимптотичній межі сильного відсмоктування

$$\frac{c_f}{2} = \frac{-v_w}{u_\infty} \quad (3.19)$$

або:

$$\tau_w = [\rho(-v_w)]u_\infty \quad (3.20)$$

Фізичний сенс асимптотичної формули (3.20) для тертя можна пояснити наступним чином. Вкладена в квадратні дужки частина цього виразу є щільністю поперечного потоку маси, що надходить із зовнішнього потоку в проникну стінку, а другим співмножником є поздовжній імпульс, що

«міститься» в кожній одиниці маси цього поперечного потоку. Похідна цих величин є щільністю потоку імпульсу через поверхню стінки, що рівносильно задаванню тертя на стінці.

Визначною властивістю граничного закону (3.19) або (3.20) є незалежність напруження тертя (або коефіцієнта тертя) від в'язкості рідини [порівняйте асимптотичну формулу (3.19) з формулою для в'язкого тертя на непроникній стінці (3.18)].

Інший важливий результат вже обговорювався вище - це перетворення на нуль тертя на поверхні при сильному вдуві. На рис. 3.12 цей випадок відтиску (або відриву) приграничного шару видно в області граничних від'ємних значень параметра вдуву f_w де параметр тертя f_w'' наближається до нуля.

3.7. Рівняння теплового пограничного шару

Якщо температури стінки і потоку рідини (див. рис. 3.1) неоднакові, то виникає тепловий потік, який в інженерних розрахунках визначають за рівнянням Ньютона-Ріхмана:

$$q_w = \alpha(t_w - t_\infty) \quad (3.21)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, міра інтенсивності процесу конвективного теплообміну між твердою поверхнею і потоком рідини. Різницю температур стінки і набігаючого потоку називають температурним напором.

Коефіцієнт тепловіддачі є складною функцією швидкості і режиму течії, форми і розмірів обтічної поверхні, теплофізичних властивостей рідини. Можна сказати, що розробка методів розрахунку коефіцієнта тепловіддачі – це головне завдання теорії конвективного теплообміну.

Нагадаємо, що рівняння в часткових похідних для динамічного приграничного шару (3.5), (3.6) після перетворень подібності перетворюються в звичайне диференціальне рівняння (3.1), інтегрування якого дає повну інформацію про швидкість і тертя в пограничному шарі.

Так само рівняння в часткових похідних (3.7) для теплового пограничного шару приводиться до наступного звичайного диференціального рівняння:

$$g''(\eta) + \text{Pr} f(\eta) g'(\eta) = 0, \quad (3.22)$$

яке потрібно інтегрувати при граничних умовах

$$g(0) = 0, g(1) = 0, \quad (3.23)$$

щоб знайти температурне поле в потоці поблизу стінки і визначити інтенсивність теплообміну.

Автомодельна змінна має попередній сенс (див. 3.15). Шукана функція g являє собою безрозмірну температуру в потоці рідини:

$$g = \frac{t(x,y)-t_w}{t_\infty-t_w} \quad (3.24)$$

Чисельний параметр Pr (число Прандтля) задає відношення кінематичної в'язкості до коефіцієнта теплопровідності рідини.

Обчислення показують, що коефіцієнт тепловіддачі α і його безрозмірна форма – число Нуссельта Nu – виражаються через похідну від безрозмірного профілю температури на стінці g'_w наступними формулами, якими можна скористатися після інтегрування крайової задачі (3.22), (3.23):

$$\alpha = \frac{q_w}{t_w-t_\infty} = \frac{-\lambda \frac{\partial t}{\partial y}|_{y=+0}}{t_w-t_\infty} = \lambda \frac{dg}{d\eta}|_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y}|_{y=0} = \lambda g'_w \sqrt{\frac{u_\infty}{2\nu_x}},$$

$$Nu_x = \frac{\alpha_x}{\lambda} = \frac{g'_w}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \quad (3.25)$$

Як видно з (3.22), для інтегрування необхідно мати розв'язок $f(\eta)$ для поля потоку. В цьому розділі ми обмежимося дослідженням теплообміну при обтіканні непроникної стінки. Оскільки безпосередньо необхідна тільки функція потоку $f(\eta)$, то для інтегрування задачі (3.1), (3.2) застосовуємо вбудовану функцію **Odesolve**, як показано на рис. 3.13.

Звернення до солвера **Odesolve** займає всього один рядок тексту. Розподіл f зберігається для подальшого використання в формі сплайн-функції f_{spl} отриманої за допомогою вбудованих функцій **cspline** і **interp**.

Щоб більш чітко уявити область пограничного шару, побудовано також розподіл швидкості і позначено відстань від стінки $\eta = 3,472$, на якому завершується 99% всієї зміни поздовжньої швидкості. Для визначення цієї межі попутно знадобиться розв'язати нелінійне рівняння методом **root**. За межами шару $\eta = 6$ швидкість вже практично постійна, а функція потоку лінійно збільшується з відстанню від стінки. Гарною апроксимацією для функції потоку за будь-яких η буде користувальницька функція f_a , яка і застосовується далі при інтегруванні рівняння теплового пограничного шару.

Розв'язок задачі про температурне поле представлено на рис. 3.14. Орієнтація осей координат на графіку обрана так, що обтічна поверхня збігається з горизонтальною віссю, вздовж якої відкладають значення безрозмірної надлишкової температури в потоці. По вертикальній осі відкладають безрозмірну відстань від стінки.

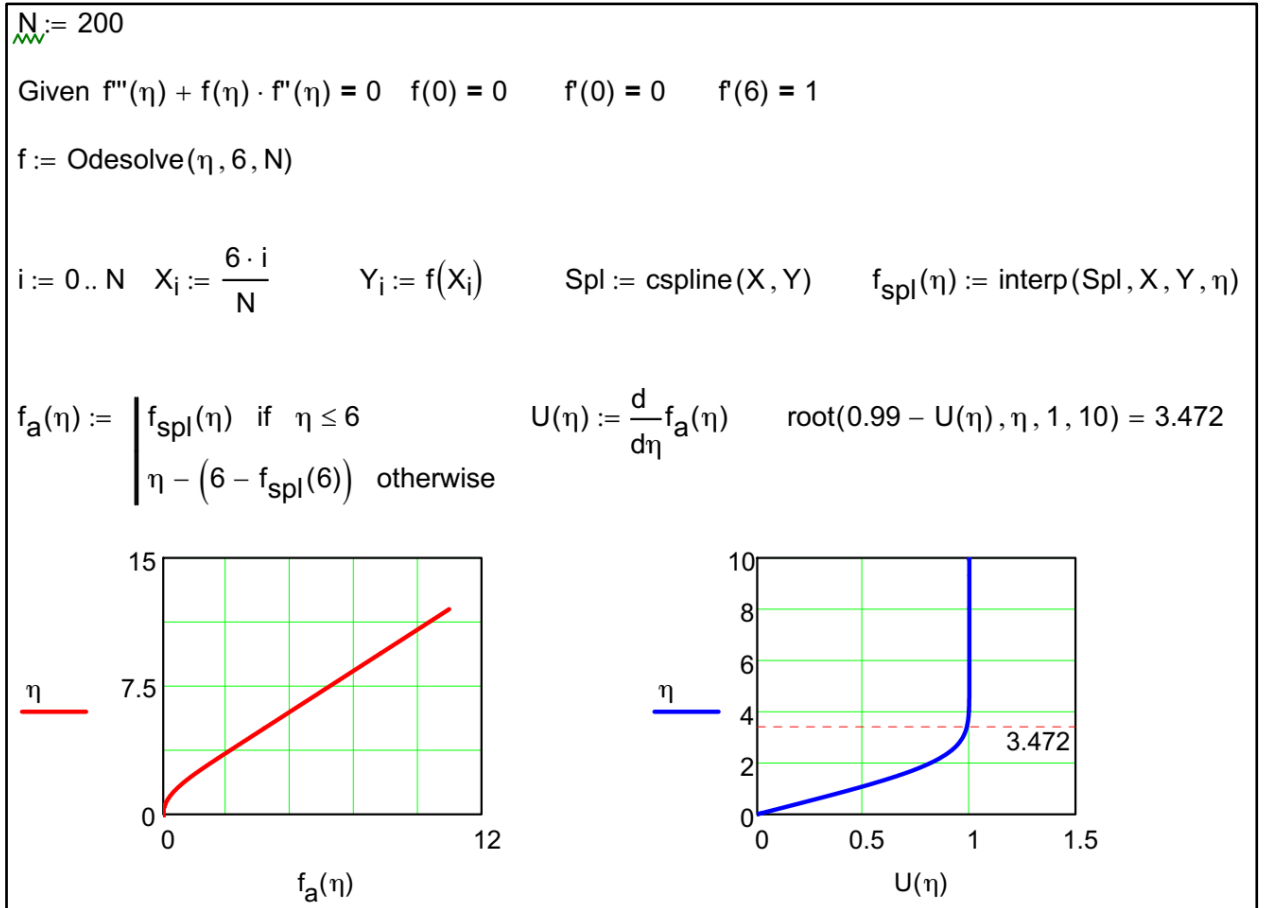


Рис. 3.13 Гідродинамічний пограничний шар на непроникній стінці

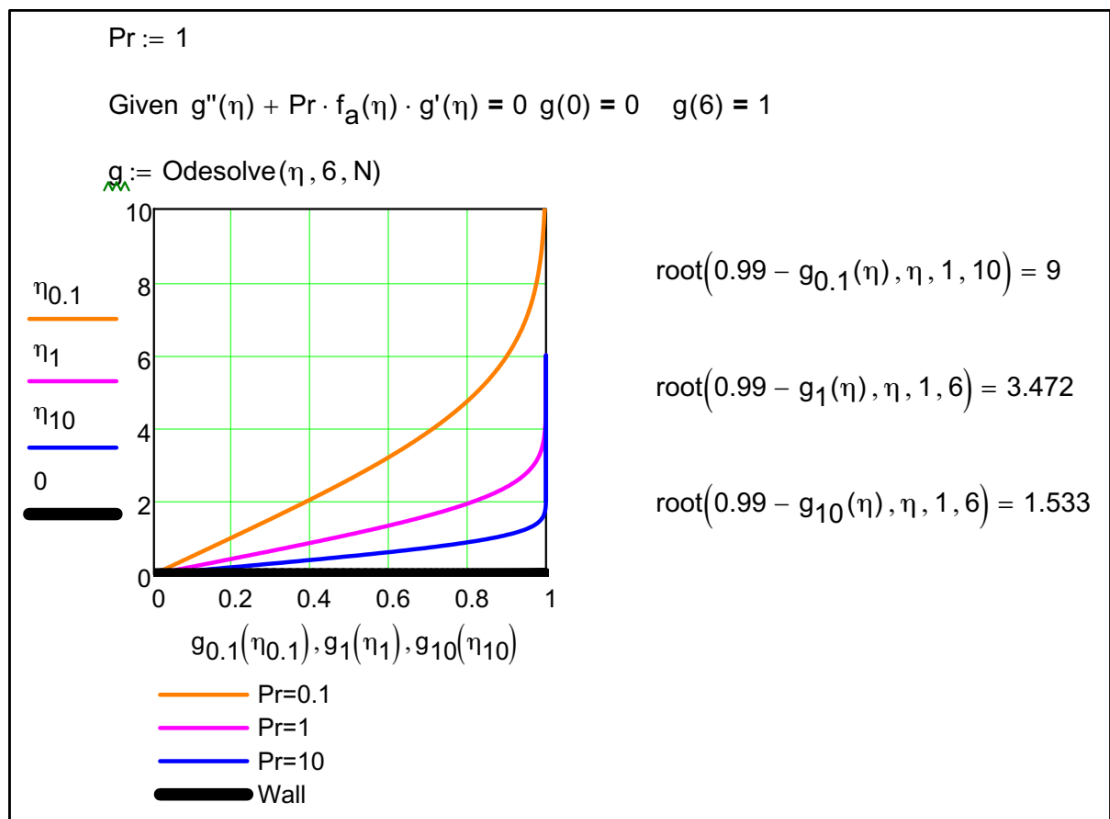


Рис. 3.14 Температурне поле при різних значеннях числа Прандтля

Розрахунки проведено в широкому діапазоні чисел Прандтля. Варто зазначити, що близькі до одиниці значення числа Прандтля характерні для газових теплоносіїв, набагато більші від одиниці – для в'язких слабкотеплопровідних органічних рідин, набагато менші від одиниці – для рідких металів. Графік на рис. 3.14 показує, що поділ теплоносіїв на такі три групи має виразний фізичний зміст:

$Pr = 1$ – профілі швидкості і температури повністю збігаються і товщини гідродинамічного і теплового пограничних шарів виявляються однаковими;

$Pr \ll 1$ (див. числовий приклад з $Pr = 0,1$) – товщина теплового шару набагато більше товщини гідродинамічного. Можна сказати, що потік в основних межах теплового пограничного шару відбувається з рівномірною швидкістю u_∞ , за винятком найближчого околу стінки;

$Pr \gg 1$ (див. числовий приклад з $Pr = 10$) – товщина гідродинамічного шару набагато більше товщини теплового. Тепловий шар знаходиться на самому дні гідродинамічного шару. Потік в межах теплового пограничного шару проходить з відносно малою швидкістю, зменшеною через близькість до стінки.

Результати варіантних розрахунків при різних значеннях числа Прандтля представлені в таблиці на рис. 3.15. У верхньому рядку таблиці вказані числа Прандтля, а в нижній – відповідні значення безрозмірного градієнта температури g'_w .

$Pr_g^T =$	1·10 ⁻³	2·10 ⁻³	0.01	0.1	0.5	1	2	4	8	10	20	100
	0.025	0.034	0.073	0.198	0.367	0.47	0.597	0.756	0.955	1.03	1.299	2.226

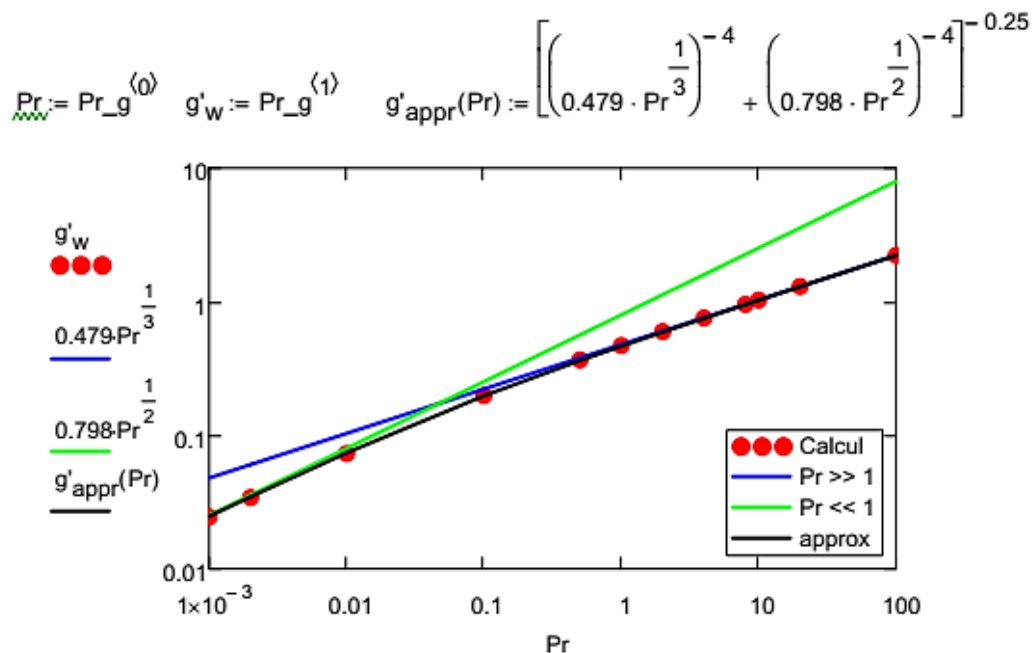


Рис. 3.15 Безрозмірний градієнт температури як функція від числа Прандтля

Ці результати представлені також графічно, причому зіставлено:

- дані чисельного інтегрування;
- асимптотичні вирази для малих і великих значень числа Прандтля;
- наближене універсальне рівняння g'_{appr} для градієнта на стінці g'_w , яке отримано методом інтерполяції між асимптотами і придатне до використання у всьому діапазоні чисел Прандтля.

Значення g'_w , підставляються у формули (3.25) щоб обчислити шукане значення коефіцієнта тепловіддачі як міри інтенсивності теплообміну.

Корисно по результатах теорії отримати уявлення про реальні цифрові значення коефіцієнта тепловіддачі для трьох різних теплоносіїв – ртуті, повітря і мастила МК, що складають три характерні групи, а також для найважливішого теплоносія – води (рис. 3.16) .

Теплофізичні властивості взяті для нормальних умов. Довжина обтічної стінки і швидкість були обрані невеликими, щоб виконувалася умова ламінарного режиму. Коефіцієнт тепловіддачі розраховувався за формулою (3.25):

$$\alpha = \lambda \frac{g'_w}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu_x}}$$

Результати обчислень показують, як сильно залежить інтенсивність теплообміну від фізичних властивостей рідини. Тепловіддача до потоку ртуті (рідкого металу з високою теплопровідністю) на три порядки перевищує тепловіддачу до повітря. Видно, що і вода є набагато кращим охолоджувачем, ніж в'язке мастило або повітря з його малою щільністю і теплопровідністю.

Інший важливий висновок теорії - істотне зростання інтенсивності теплообміну при збільшенні швидкості течії, пропорційно кореню квадратному зі значення швидкості потоку [див. (3.25)].

Хоча ці результати отримані для ламінарного режиму, якісний характер отриманих залежностей зберігається і для більш важливих для практики (і більш складних для розрахунку) турбулентних потоків.

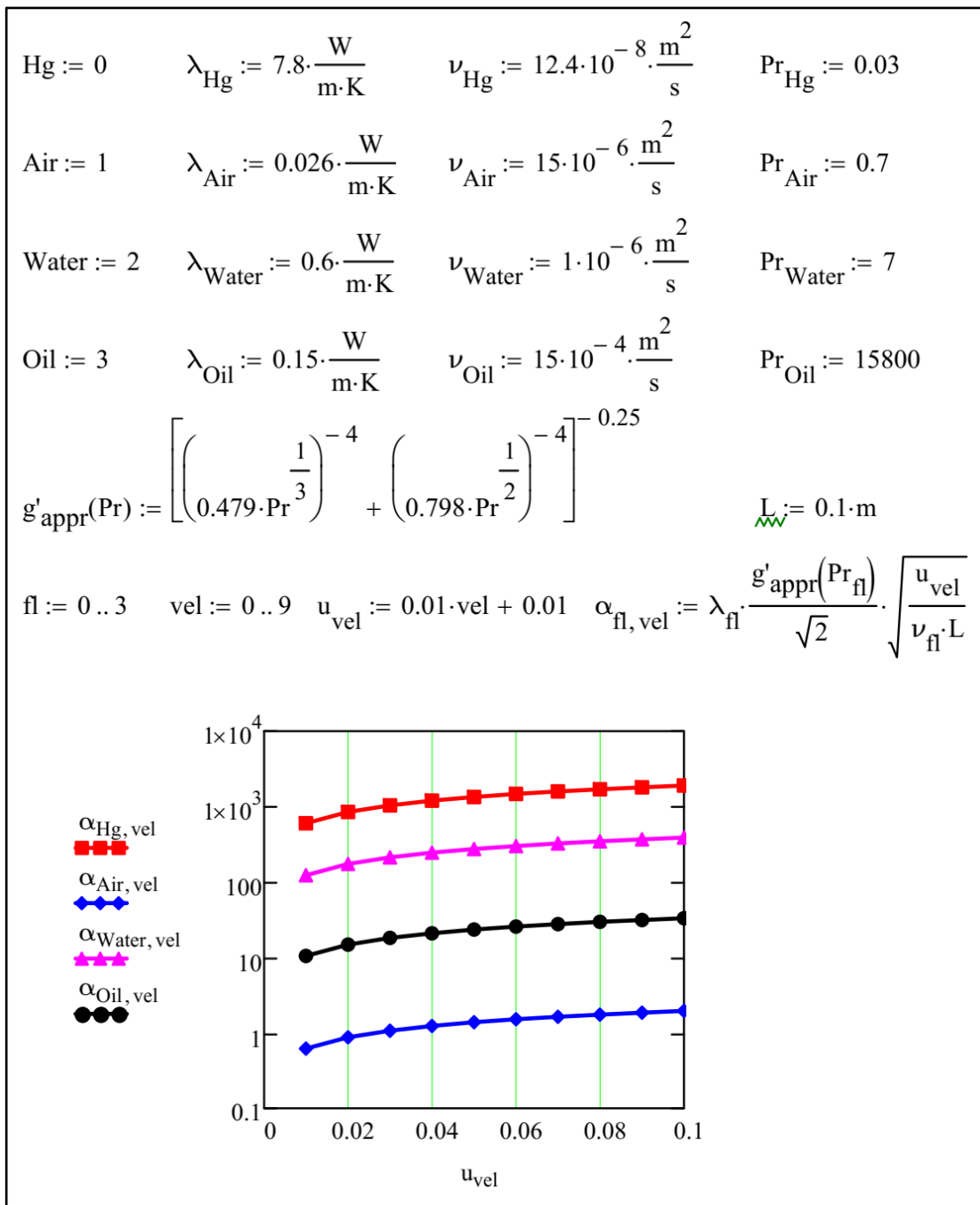


Рис. 3.16 Тепловіддача до різних теплоносіїв

3.8. Закон теплообміну

Результати обчислень для інтенсивності теплообміну можна представити у формі, яка, ймовірно, має бути більш узагальненою, ніж співвідношення (3.25) для коефіцієнта тепловіддачі при поздовжньому обтіканні ізотермічної пластини.

Перепишемо (3.25) як рівняння, що зв'язує безрозмірне локальне значення коефіцієнта тепловіддачі і число Рейнольдса, побудоване по локальним значенням товщини пограничного шару та швидкості зовнішнього потоку:

$$\frac{\alpha}{\rho c u_{\infty}} = \frac{g'_w \delta_{txx,rel}}{Pr} \frac{1}{Re_{txx}}, \quad (3.26)$$

$$\text{де } Re_{txx} = \frac{u_{\infty} \delta_{txx}}{\nu}, \delta_{txx,rel} = \frac{\delta_{txx}}{\sqrt{\frac{2\nu x}{u_{\infty}}}}$$

Товщина втрати ентальпії може бути обрахована за формулою (2.1), якщо відомі профілі швидкості та температури. В безрозмірному вигляді:

$$\delta_{txx,rel} = \int_0^{\infty} U(\eta)(1 - g(\eta))d\eta$$

Результати обчислення товщини втрати ентальпії наведені на рисунку 3.17.

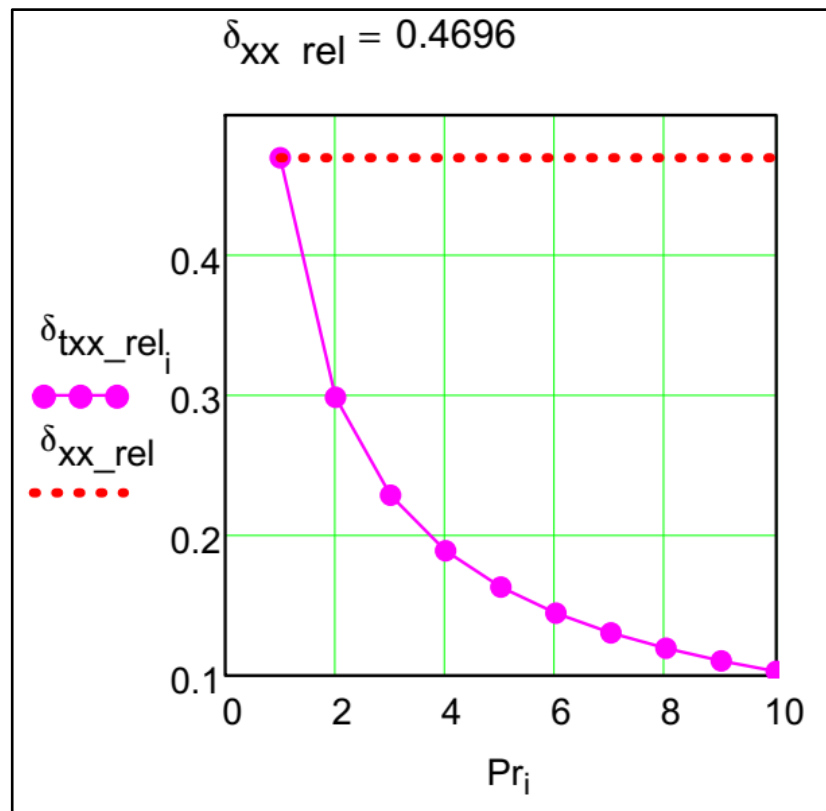


Рис. 3.17 Залежність відносної товщини теплового пограничного шару від числа Прандтля

Для порівняння там же позначено значення відносної товщини втрати імпульсу

$$\delta_{xx,rel} = \frac{\delta_{xx}}{\sqrt{\frac{2\nu x}{u_{\infty}}}}$$

Співвідношення товщини теплового і динамічного шарів розглянуте вище (див. рис. 3.14).

Інші дані, необхідні для обчислення коефіцієнтів у формулі (3.26), вже отримані раніше (див. рис. 3.13 і 3.14). Результат буде наступним:

$$St \equiv \frac{\alpha}{\rho c u_{\infty}} = \frac{\varphi(Pr)}{Re_{t_{xx}}}, \text{ де } \varphi(Pr) \cong \frac{0,22}{Pr^{4/3}}$$

Апроксимація $\varphi(Pr)$ підходить для газів та рідких неметалічних теплоносіїв.

В рамках інтегрального методу співвідношення (3.27) для числа Стантона St носить назву стандартного закону теплообміну при ламінарному режимі. Ми отримали його при розрахунку теплообміну на поздовжньо обтічній ізотермічній пластині. Розрахунки та експерименти показують, що з задовільною точністю цей закон описує також локальну тепловіддачу для неізотермічних поверхонь зі змінною швидкістю зовнішнього потоку. Така задача була розглянута в другому розділі.

3.9. Висновок

Картини векторного поля потоку наочно показують, що при заданому в одному з прикладів великому від'ємному значенні параметра вдуву $f_w = -0,7$ має місце явище відтиску пограничного шару. У безпосередній близькості від стінки вектор швидкості спрямований практично вертикально і лише на деякій відстані від неї розвивається поздовжній потік зі зсувом. Такі режими із вдувом теплоносія через стінку використовуються для захисту поверхонь від впливу високотемпературного потоку газу або для захисту від хімічно агресивних середовищ.

Варіюючи в розрахунках значення параметра f_w можна спостерігати вплив поперечного потоку маси на гідродинаміку пристінного потоку. При $f_w = 0$ виходить стандартна картина обтікання непроникної стінки, а при позитивних значеннях – картина потоків із відсмоктуванням. Зауважимо, що в аеродинаміці відсмоктування використовується для запобігання небезпечного явища відриву пограничного шару при обтіканні крила з великими кутами атаки, як при посадці літака. У теплообмінних установках задачі з відсмоктуванням виникають при інтенсивній конденсації пари.

Цікаві ефекти можна спостерігати при спільному впливі параметрів прискорення β і проникності f_w . Варіюючи ці два параметра, інженер-проектувальник може здійснювати цільове управління пограничним шаром, наприклад, застосовуючи відсмоктування, щоб запобігти відриву при перетіканню потоку проти градієнта тиску.

Розв'язок рівняння Фолкнера-Скен і аналогічного за структурою рівняння для теплового пограничного шару виявляють основні закономірності

тертя і теплообміну, показуючи, яку роль в цих процесах відіграють фізичні властивості рідини, розміри обтічної поверхні, швидкість течії. Спеціальним чином представлені в формі законів тертя, теплообміну і масообміну для ламінарних течій, результати розв'язку використовуються в рамках наближених інтегральних методів, орієнтованих на інженерні програми. Приклад такого завдання розглянуто в розділі 2.

Центральною проблемою техніки обчислень в цьому розділі було застосування функції **sbval**, що зводить двоточкову крайову задачу до початкової. Слід попередити, що метод «пристрілки» не завжди приводить до успіху. Є завдання з сильною залежністю розв'язку від початкових даних. Тоді чисельна нестійкість заводить збіжності методу **sbval**.

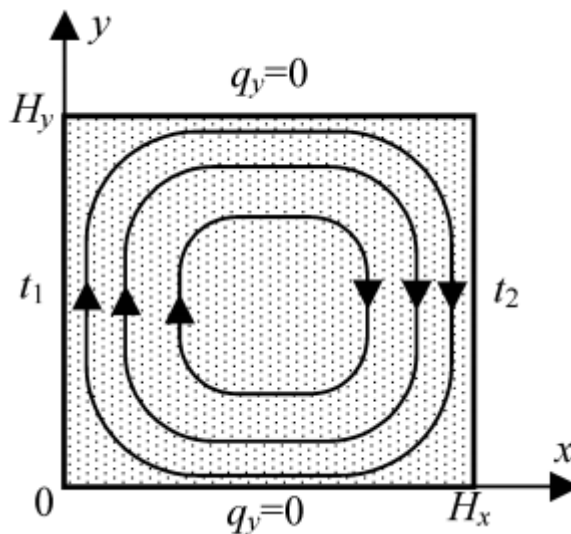
Іншою, більш радикальною альтернативою є застосування кінцево-різницевого методу в поєднанні з методом прогонки.

Завдання для індивідуальної роботи

Крайова задача теплової конвекції

Задача 1

Створити аналітичну математичну модель крайової задачі теплової конвекції (задача в динамічних змінних $u-v-p-T$) на прикладі плоского руху нестисливої в'язкої рідини з постійними властивостями в горизонтальному каналі прямокутного перетину.



Бічні стінки каналу прийняти ізотермічними з температурами t_1 і t_2 ($t_1 > t_2$), верхня і нижня стінки - адіабатні.

В'язке середовище, нагріваючись у лівій стінки, піднімається внаслідок зменшення щільності вгору і опускається відповідно вниз при охолодженні у правій стінки. Утворюється замкнутий контур циркуляції рідини з граничними шарами під стінами каналу.

Зауважимо, що в динамічних змінних плоска задача теплової конвекції зводиться до системи п'яти диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g(1 - \beta \Delta T) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v$$

$$\nabla^2 p = \rho_0 \beta g \frac{\partial T}{\partial y} - 2\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

з відповідними крайовими умовами

$$\left. \begin{aligned} T(\tau=0) &= T_0, \quad u(\tau=0) = v(\tau=0) = 0, \\ T(0, y) &= T_1, \quad T(H_x, y) = T_2, \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, H_y) = 0, \\ u(0, y) &= u(H_x, y) = v(x, 0) = v(x, H_y) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Необхідно отримати розподіл температур по площі каналу й побудувати графік поля температур.

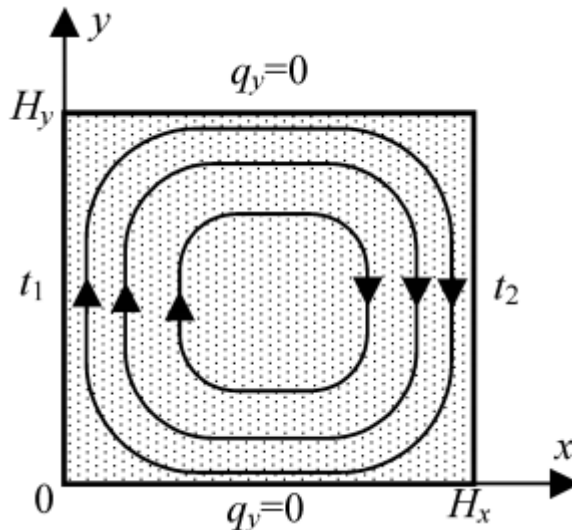
Величини температур t_1 і t_2 та геометричні розміри H_x , H_y обрати з таблиці.

Математичну модель реалізувати в середовищі MathCad.

Варіант	t_1 , К	t_2 , К	H_x , м	H_y , м
1	520	300	0,1	0,2
2	425	370	0,2	0,3
3	710	520	0,1	0,4
4	350	280	0,4	0,1
5	295	273	0,5	0,2
6	355	320	0,3	0,7
7	620	273	0,2	0,4
8	390	300	0,5	0,3
9	330	273	0,6	0,4
10	410	350	0,2	0,2
11	470	310	0,3	0,2
12	500	273	0,1	0,05

Задача 2

Створити аналітичну математичну модель крайової задачі теплової конвекції в змінних завихреність-функція току ($\omega-\psi-T$) на прикладі плоского руху нестисливої в'язкої рідини з постійними властивостями в горизонтальному каналі прямокутного перетину.



Бічні стінки каналу прийняти ізотермічними з температурами t_1 і t_2 ($t_1 > t_2$), верхня і нижня стінки - адіабатні.

В'язке середовище, нагріваючись у лівій стінки, піднімається внаслідок зменшення щільності вгору і опускається відповідно вниз при охолодженні у правій стінки. Утворюється замкнутий контур циркуляції рідини з граничними шарами під стінами каналу.

Зауважимо, що необхідно виключити з постановки задачі тиск та ввести функцію току ψ , пов'язану з компонентами швидкості співвідношеннями:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v$$

й таку, що задовольняє рівняння нестисливості потоку. За фізичним змістом функція току характеризує об'ємну витрату в'язкого середовища на одиницю часу.

Тобто, формулювання задачі теплової конвекції в $\omega-\psi-t$ -змінних призводить до системи трьох диференціальних рівнянь: перенесення енергії, Пуассона і перенесення завихреності, в яких швидкість пов'язана з функцією току співвідношеннями наведеними вище.

Таким чином:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi = \omega,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega + g\beta \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Початкові крайові умови для завихренності і функції току матимуть вигляд:

$$\omega(\tau=0)=0, \quad \psi(\tau=0)=0.$$

Граничні значення функції тока:

$$\psi(0, y) = \psi(H_x, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, H_y) = 0.$$

Необхідно отримати розподіл температур по площі каналу й побудувати графік поля температур.

Величини температур t_1 і t_2 та геометричні розміри H_x , H_y обрати довільними.

Математичну модель реалізувати в середовищі MathCad.

Варіант	t_1, K	t_2, K	H_x, m	H_y, m
1	520	300	0,1	0,2
2	425	370	0,2	0,3
3	710	520	0,1	0,4
4	350	280	0,4	0,1
5	295	273	0,5	0,2
6	355	320	0,3	0,7
7	620	273	0,2	0,4
8	390	300	0,5	0,3
9	330	273	0,6	0,4
10	410	350	0,2	0,2
11	470	310	0,3	0,2
12	500	273	0,1	0,05

Стаціонарна теплопровідність плоского шару

Задача 3

Згідно умови розглядається частинний випадок стаціонарної задачі теплопровідності для плоского шару завтовшки δ , що не містить внутрішніх джерел тепла ($qV = 0$), на поверхнях якого $x = 0$ і $x = \delta$ задані граничні умови першого роду, тобто підтримуються температури відповідно T_1 та T_2 .

Математичне формулювання стаціонарної крайової задачі теплопровідності в такому випадку має вигляд:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0,$$
$$T(x=0) = T_1, \quad T(x=\delta) = T_2.$$

Загальний розв'язок рівняння теплопровідності в даному випадку матиме вигляд:

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} x,$$

що дає лінійний розподіл температури по товщині шару.

Густину теплового потоку пропонується визначати з законом Фур'є:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\delta} = \frac{T_1 - T_2}{\delta/\lambda}$$

де, відповідно, співвідношення λ/δ і δ/λ є теплопровідністю і тепловим опором плоского шару.

Втрати тепла через плоску стінку:

$$Q = - \int_S \int_{\tau} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS d\tau = \frac{T_1 - T_2}{\delta/\lambda} S \cdot \tau \text{ [Дж]}.$$

Визначити втрати тепла через металеву стінку (λ_1 , Вт / (м· К)) площею S , м за час τ , год.

Розрахувати, як зміниться теплопровідність, якщо металеву стінку вкрити шаром теплоізоляту (λ_2 , Вт / (м· К)).

Товщини стінок – δ_1 та δ_2 , мм, температури зовнішньої і внутрішньої поверхонь стінки відповідно t_1 , К та t_2 , К. Визначити вартість втрат при ціні 1 кВт · год енергії 1,68 грн.

Задачу реалізувати в середовищі MathCad.

	δ_1 , мм	δ_2 , мм	t_1 , К	t_2 , К	λ_1 , Вт / (м · К)	λ_1 , Вт / (м · К)	S, м	τ , год
1	2	20	520	300	70	0.07	50	24
2	3	30	425	370	80	0.02	12	12
3	4	50	710	520	200	0.05	100	15
4	1	10	350	280	380	0.08	40	14
5	6	40	295	273	120	0.1	30	10
6	10	20	355	320	250	0.023	70	2
7	5	50	620	273	380	0.04	60	1
8	7	30	390	300	85	0.08	35	7
9	12	70	330	273	210	0.06	60	8
10	8	10	410	350	140	0.01	120	18
11	10	40	470	310	78	0.2	20	40
12	4	60	500	273	370	0.07	45	27

Список літератури

1. Щелкин К.И. Теория горения и детонации // Механика в СССР за пятьдесят лет. М.: Наука, 1970. Т. 2. С. 880.
2. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
3. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергоатомиздат, 1985. 320 с.
4. Практикум по теплопередаче: Учебное пособие для вузов / А.П. Солодов, Ф.Ф. Цветков, А.В. Елисеев, В.А. Осипова; Под ред. А.П. Солодова. — М.: Энергоатомиздат, 1986. 296 с.
5. Саломзода Ф.Г., Солодов А.П. Тепломассообмен при конденсации и сорбции из геотермальной парогазовой смеси // Изв. РАН. Энергетика. 1997. № 4. С. 35-47.
6. Солодов А.П. Интегральный метод решения задач пограничного слоя. Издательство МЭИ, 1992. 79 с.
7. Солодов А.П. Теплопередача в окрестности передней критической точки поперечно обтекаемой трубы (анализ в среде MathCad) // Теплоэнергетика. 2001. № 3. СП5-11.
8. Солодов А.П., Очков В.Ф. MathCad /Дифференциальные модели. -М.: Издательство МЭИ, 2002, — 239 с.: ил.
9. Лагерстрем, Пако Аксель. Теория ламинарного течения. Princeton University Press, 1996.
10. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. 296 с.